

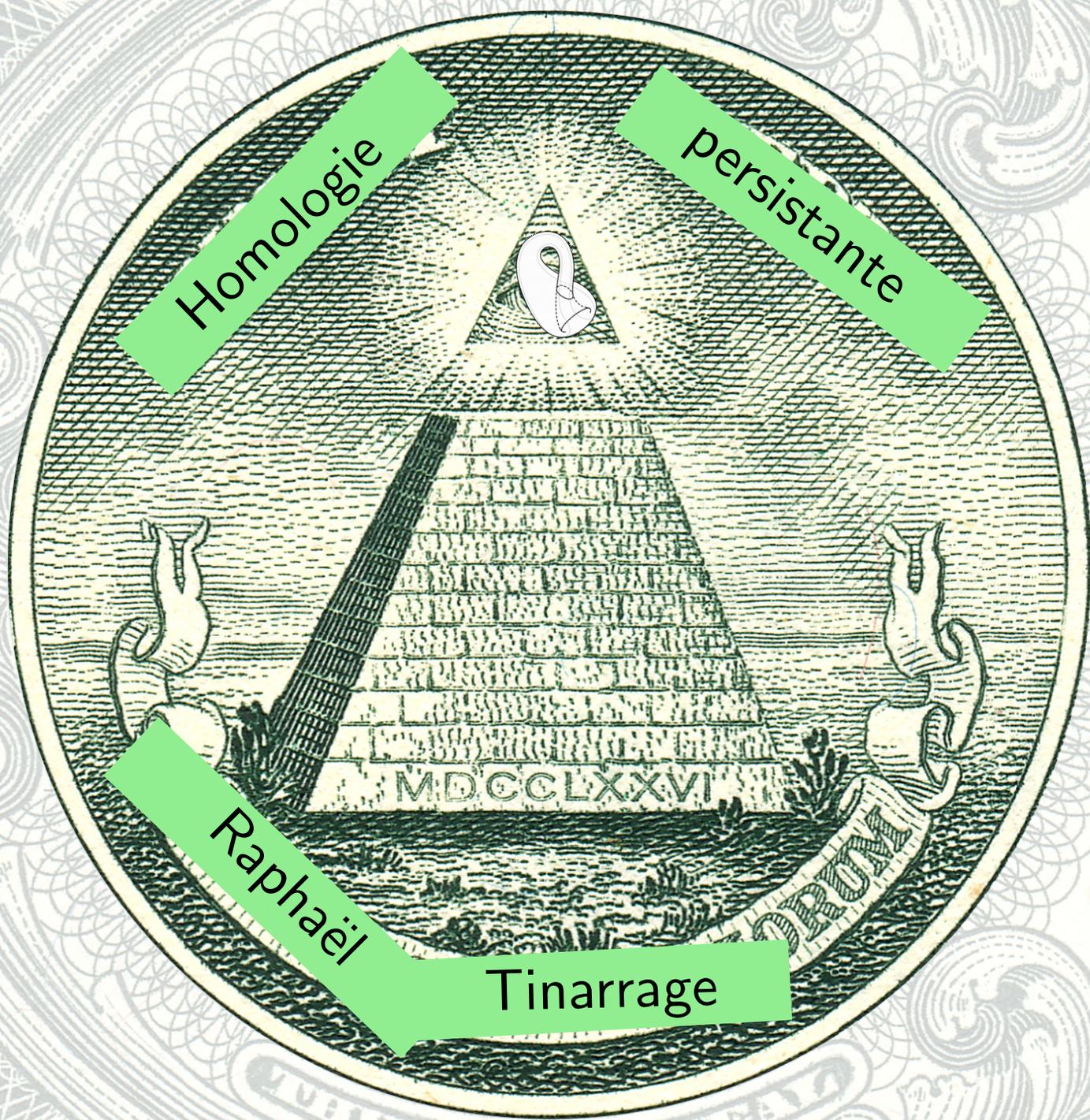
Homologie

persistante

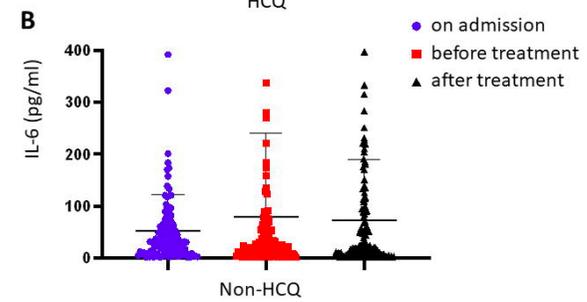
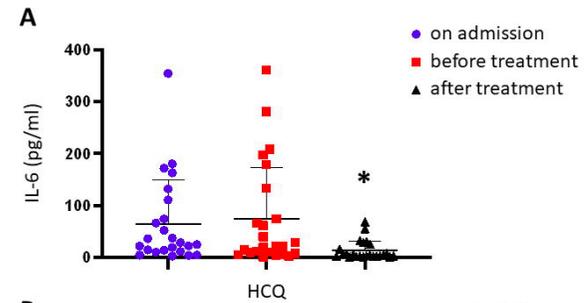
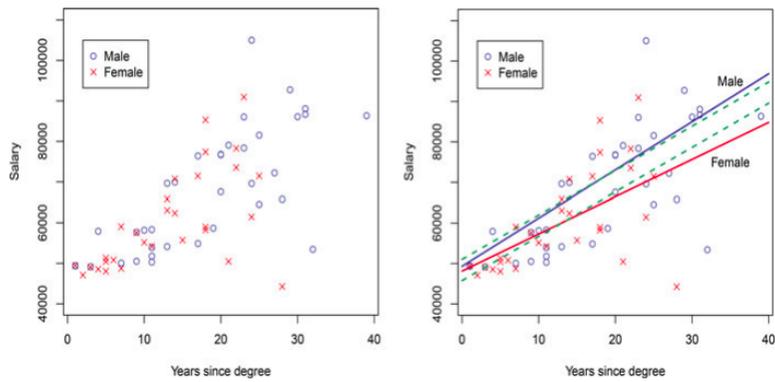
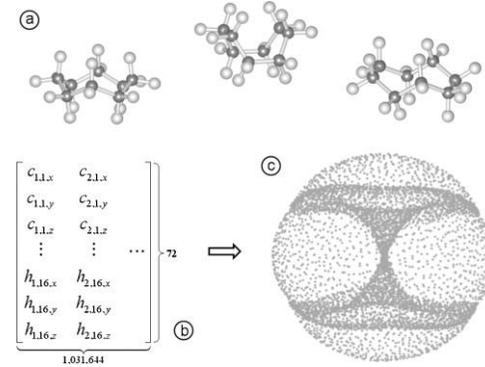
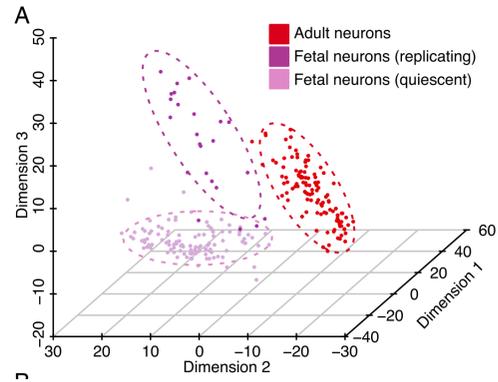


Raphaël

Tinarrage



Choisissons un jeu de données



Quantités géométriques

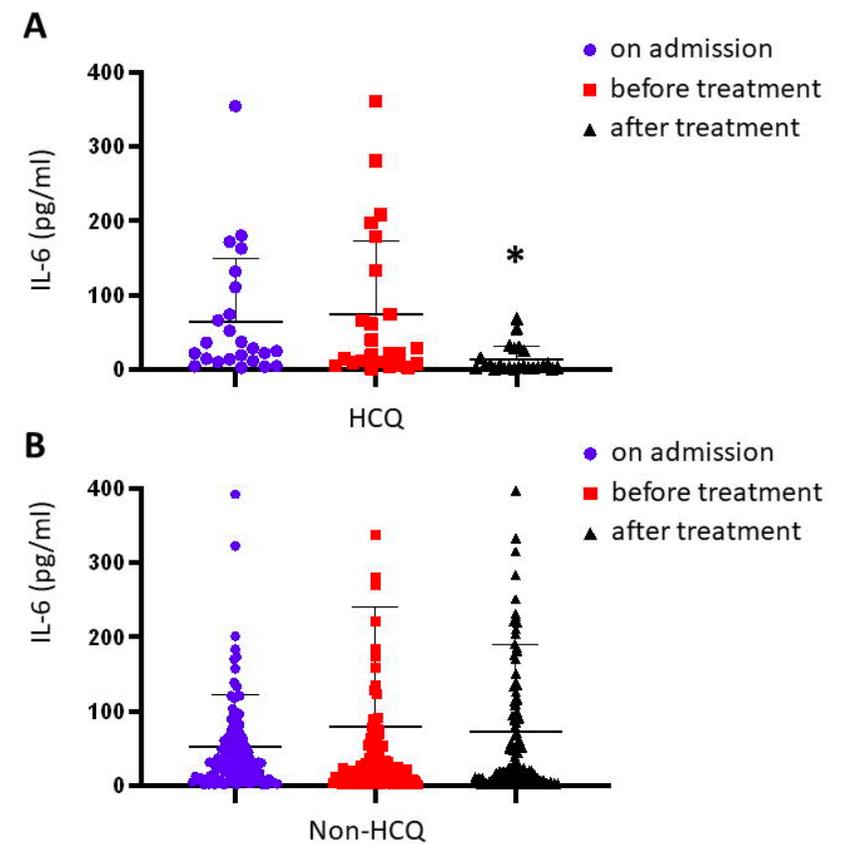
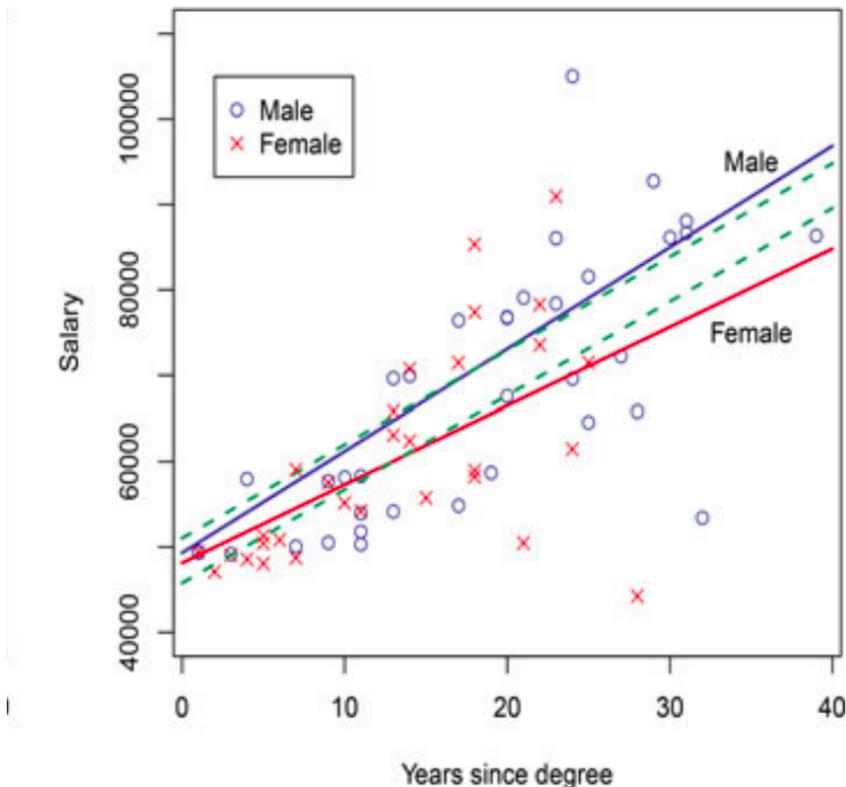
- valeurs métriques quantitatives (diamètre, courbure)
- relations algébriques entre les paramètres

Quantités topologiques

- valeurs qualitatives (dimension, nombre de composantes connexes, orientabilité)
- invariants algébriques (groupes d'homologie, classes caractéristiques)

Quantités géométriques

- valeurs métriques quantitatives (diamètre, courbure)
- relations algébriques entre les paramètres



[Wen Wang et al, Hydroxychloroquine application is associated with a decreased mortality in critically ill patients with COVID-19]

[L. Billard, Study of Salary Differentials by Gender and Discipline]

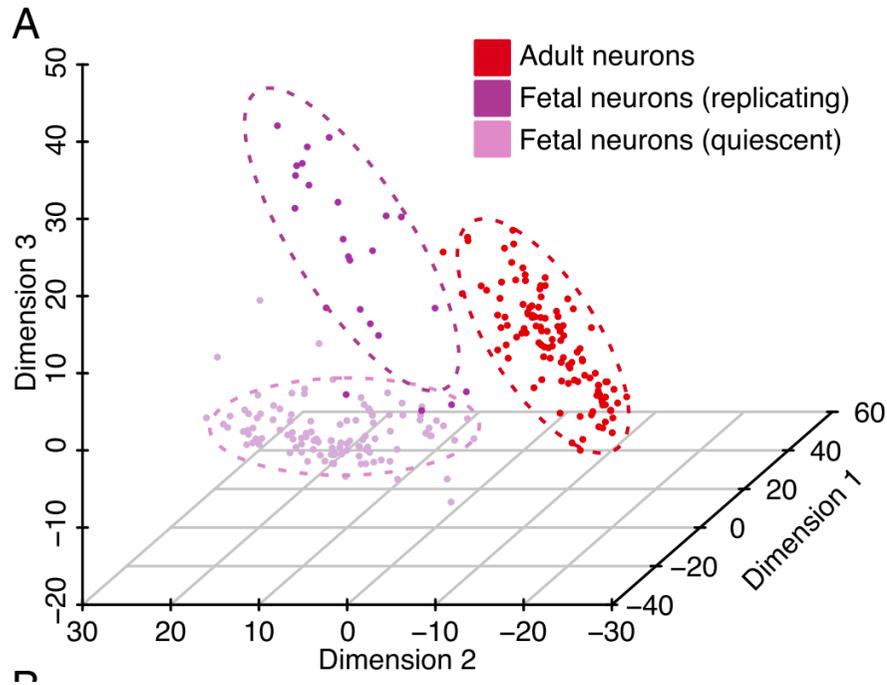
Quantités géométriques

- valeurs métriques quantitatives (diamètre, courbure)
- relations algébriques entre les paramètres

Quantités topologiques

- valeurs qualitatives (dimension, nombre de composantes connexes, orientabilité)
- invariants algébriques (groupes d'homologie, classes caractéristiques)

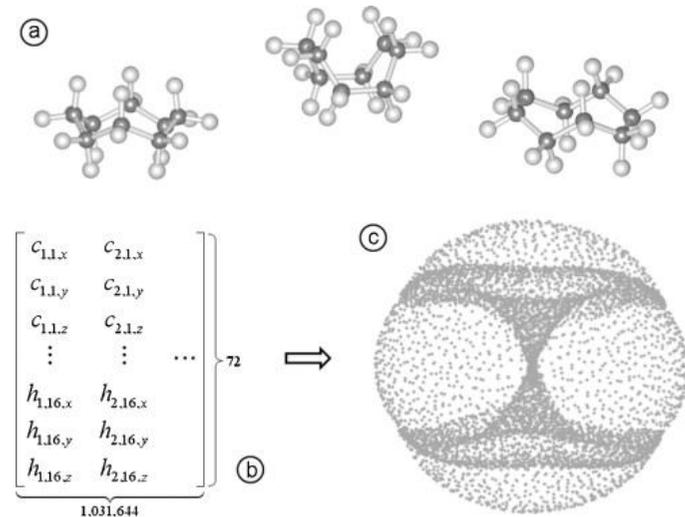
Quantités topologiques

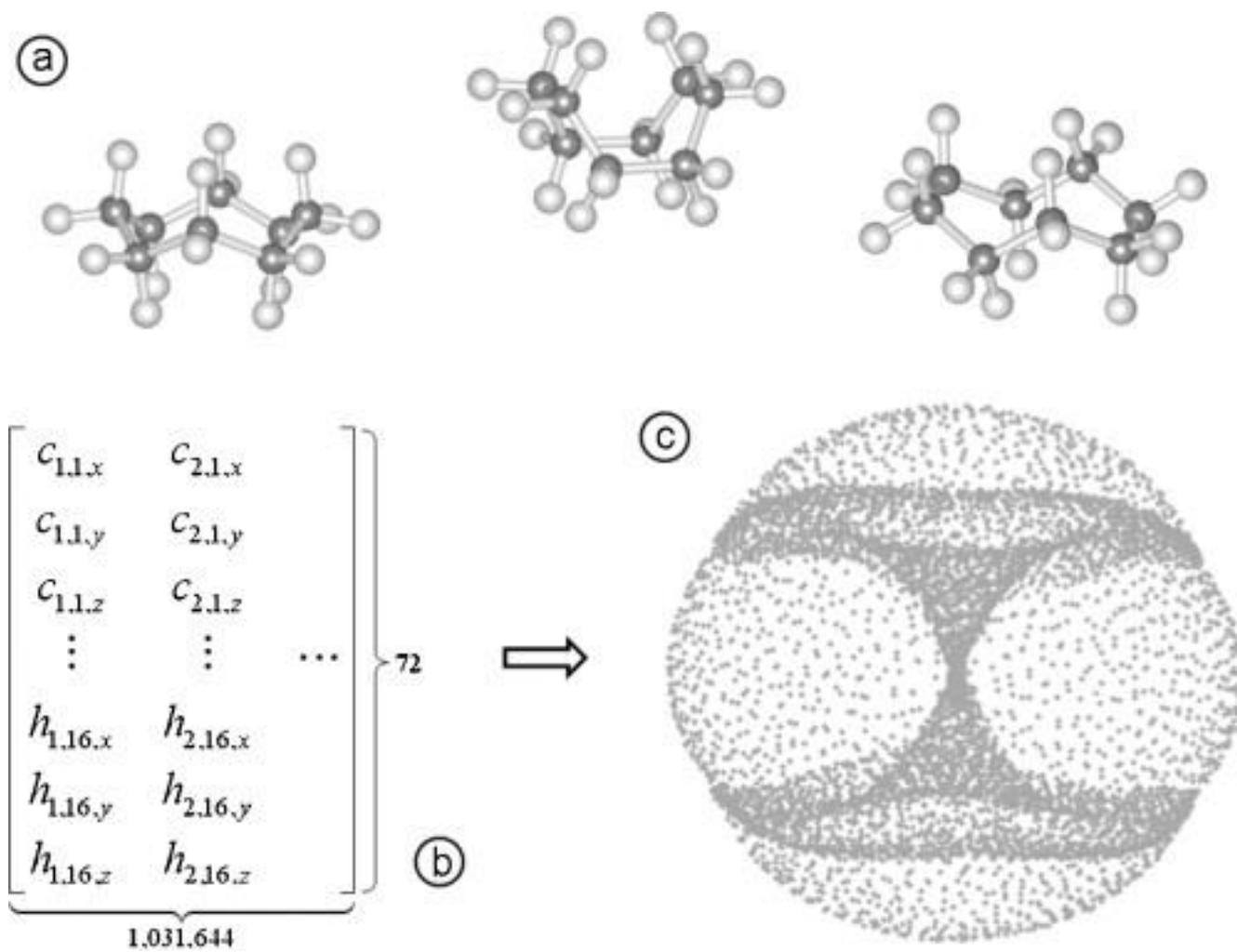


[S. Darmanis et al, A survey of human brain transcriptome diversity at the single cell level]

- valeurs qualitatives (dimension, nombre de composantes connexes, orientabilité)
- invariants algébriques (groupes d'homologie, classes caractéristiques)

[S. Martin et al, Topology of cyclo-octane energy landscape]





[S. Martin et al, Topology of cyclo-octane energy landscape]

Quantités géométriques

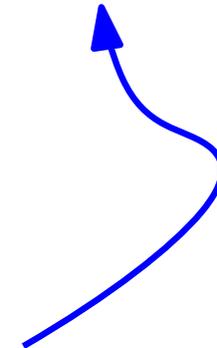
- valeurs métriques quantitatives (diamètre, courbure)
- relations algébriques entre les paramètres



relation d'isométrie

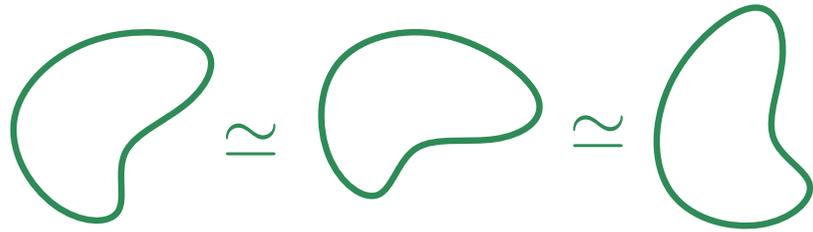
Quantités topologiques

- valeurs qualitatives (dimension, nombre de composantes connexes, orientabilité)
- invariants algébriques (groupes d'homologie, classes caractéristiques)

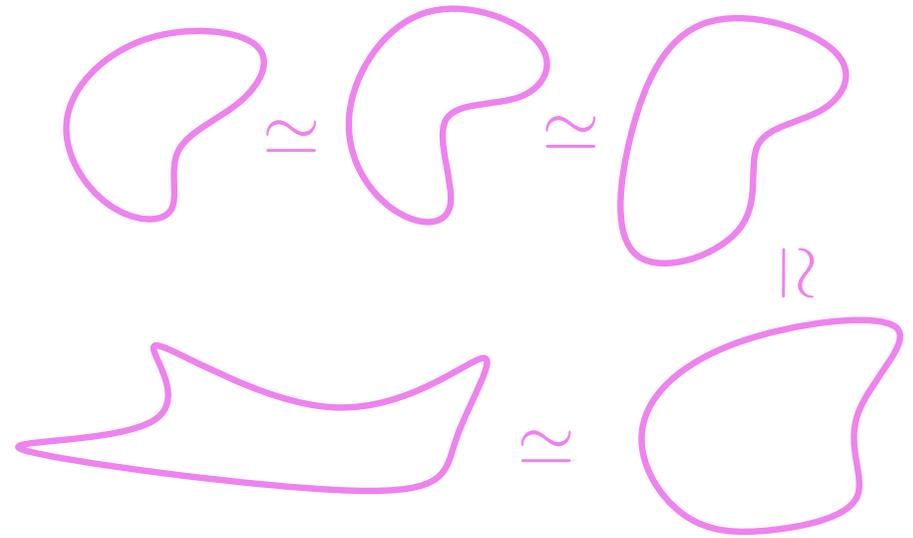


relation d'homéomorphie
relation d'homotopie

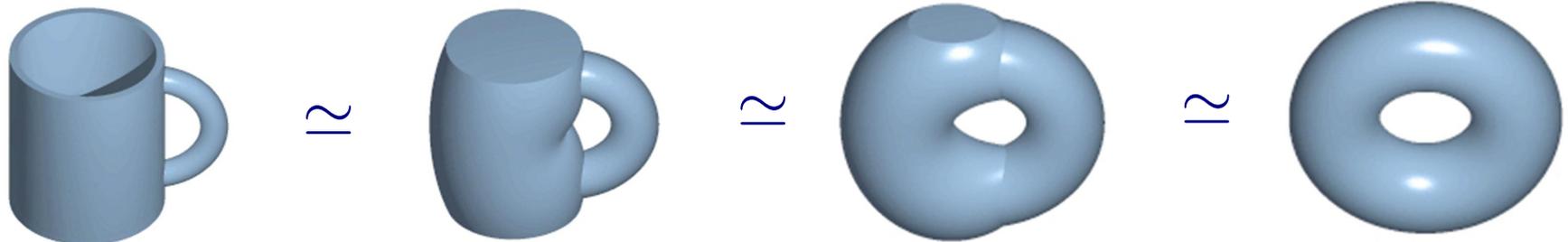
relation d'isométrie



relation d'homéomorphie



relation d'homotopie



Analyse topologique des données



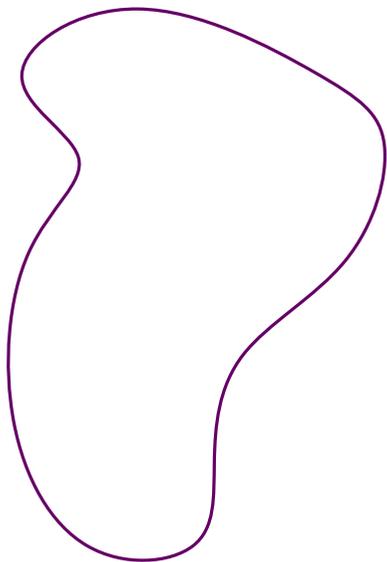
Homologie persistante

Idée directrice

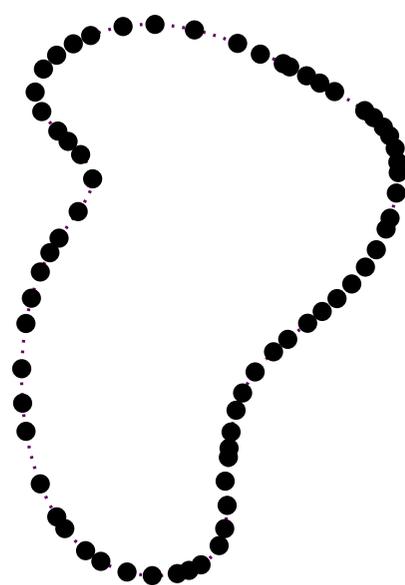
On observe un ensemble de points $X \subset \mathbb{R}^n$, issu d'une expérience scientifique.

L'ensemble X est proche d'un objet géométrique d'intérêt \mathcal{M} (sous-variété, ensemble de portée strictement positive, immersion).

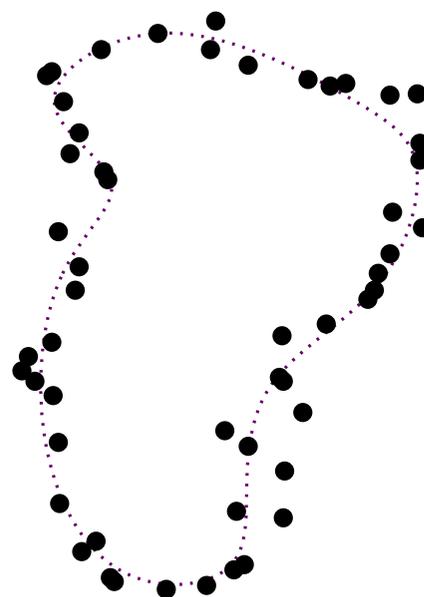
Objectif : estimer la topologie de \mathcal{M} à partir de X . Ou plus simplement, estimer l'homologie de \mathcal{M} .



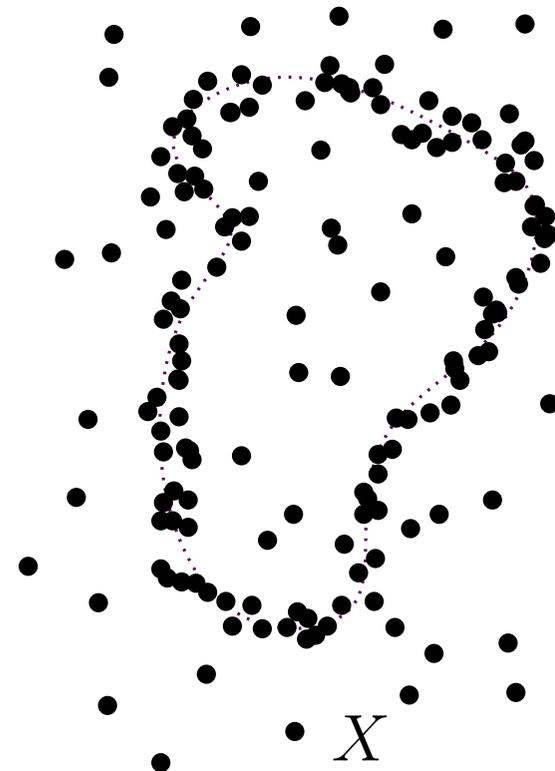
\mathcal{M}



X



X



X

Homologie singulière en un transparent

On travaille sur le corps de base \mathbb{Z}_2 . Soit $i \geq 0$.

L'homologie (singulière) de degré i est un foncteur

$$H_i : \text{Top} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Z}_2}.$$

Autrement dit,

- pour chaque espace topologique X , on a un \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel $H_i(X)$,
- pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques, on a un morphisme $H_i(f) : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$.

Homologie singulière en un transparent

On travaille sur le corps de base \mathbb{Z}_2 . Soit $i \geq 0$.

L'homologie (singulière) de degré i est un foncteur

$$H_i : \text{Top} \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Z}_2}.$$

Autrement dit,

- pour chaque espace topologique X , on a un \mathbb{Z}_2 -espace vectoriel $H_i(X)$,
- pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$ entre espaces topologiques, on a un morphisme $H_i(f) : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$.

Exemples

$$H_0(\bigcirc) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\bigcirc) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(\bigcirc) = 0$$

$$H_0(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2^2$$

$$H_2(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2$$

Homologie singulière en deux transparents

Remarque : un \mathbb{Z}_2 -module de dimension finie est isomorphe à un \mathbb{Z}_2^k .

Interprétation des groupes d'homologie

$H_0(X)$ vaut \mathbb{Z}^k où k est le nombre de composantes connexes de X

$H_1(X)$ vaut $\mathbb{Z}^{k'}$ où k' est le nombre de trous dans X

$H_2(X)$ vaut $\mathbb{Z}^{k''}$ où k'' est le nombre de trous de dimension 2 dans X

Exemples

$$H_0(\bigcirc) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\bigcirc) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_2(\bigcirc) = 0$$

$$H_0(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2$$

$$H_1(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2^2$$

$$H_2(\text{torus}) = \mathbb{Z}_2$$

Homologie singulière en deux transparents

Remarque : un \mathbb{Z}_2 -module de dimension finie est isomorphe à un \mathbb{Z}_2^k .

Interprétation des groupes d'homologie

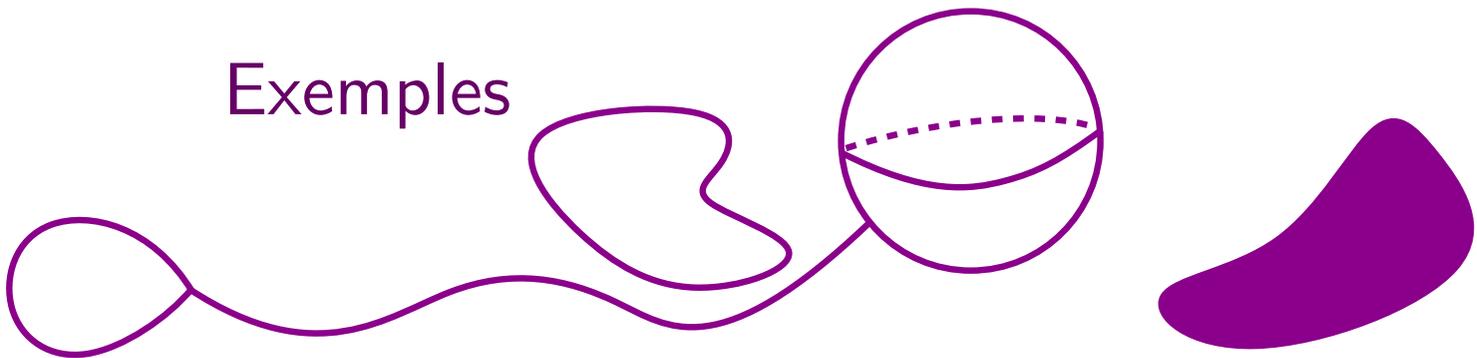
$H_0(X)$ vaut \mathbb{Z}^k où k est le nombre de composantes connexes de X

$H_1(X)$ vaut $\mathbb{Z}^{k'}$ où k' est le nombre de trous dans X

$H_2(X)$ vaut $\mathbb{Z}^{k''}$ où k'' est le nombre de trous de dimension 2 dans X

Exemples

Soit $X =$



$$H_0(X) = \mathbb{Z}_2^3$$

$$H_1(X) = \mathbb{Z}_2^2$$

$$H_2(X) = \mathbb{Z}_2$$

Filtration de Čech

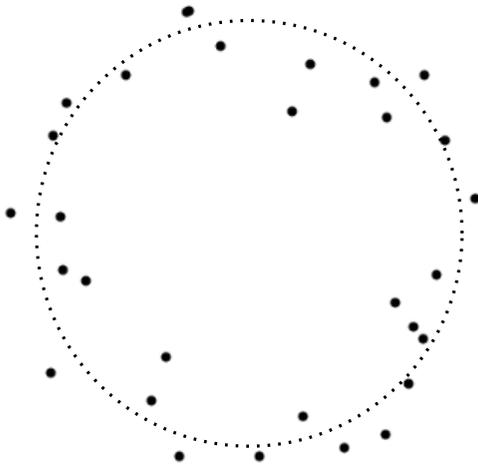
Filtration de Čech

On a toujours un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$.

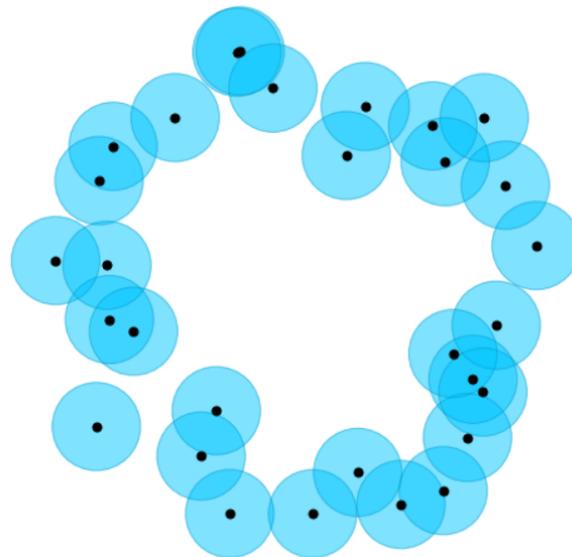
Pour tout $t \geq 0$, on définit le t -épaississement

$$X^t = \bigcup_{x \in X} \overline{B}(x, t)$$

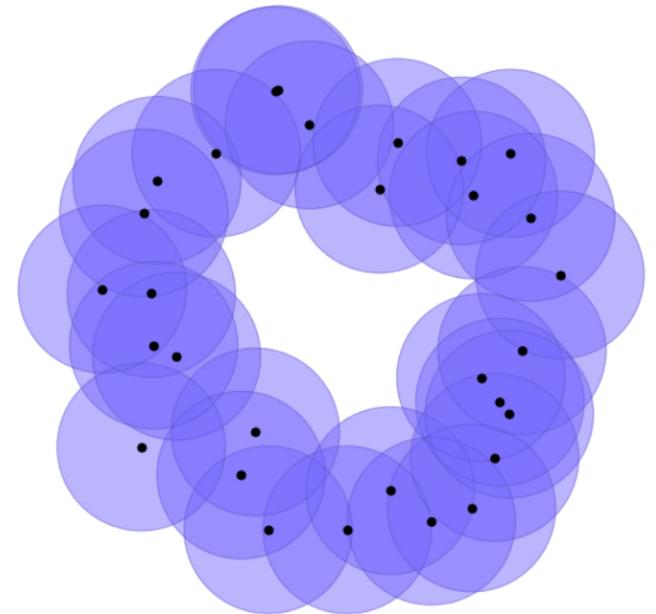
où $\overline{B}(x, t)$ représente la boule fermée.



$X^0 = X$



$X^{0,2}$



$X^{0,4}$

La *filtration de Čech* de X est la collection $(X^t)_{t \geq 0}$.

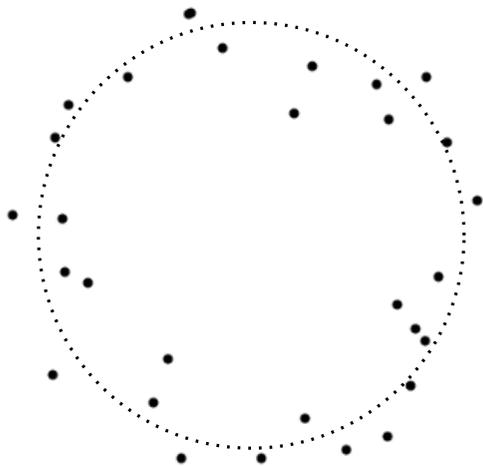
Filtration de Čech

On a toujours un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$.

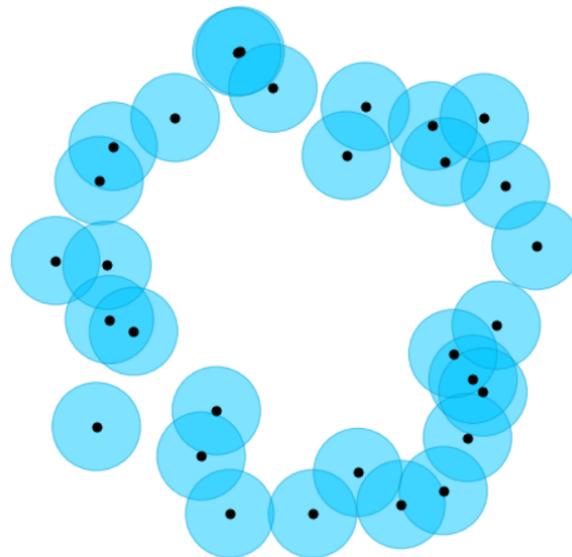
Pour tout $t \geq 0$, on définit le t -épaississement

$$X^t = \bigcup_{x \in X} \overline{B}(x, t)$$

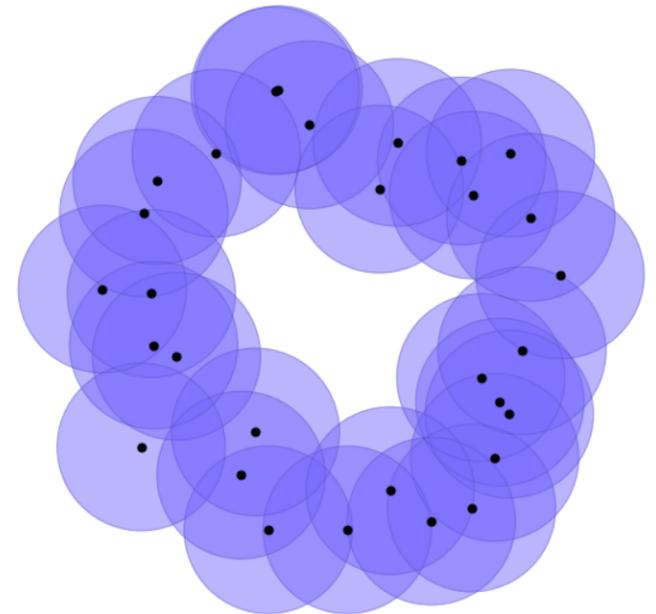
où $\overline{B}(x, t)$ représente la boule fermée.



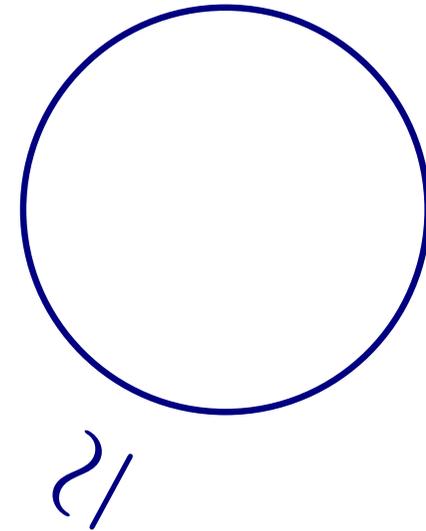
$X^0 = X$



$X^{0,2}$



$X^{0,4}$



La *filtration de Čech* de X est la collection $(X^t)_{t \geq 0}$.

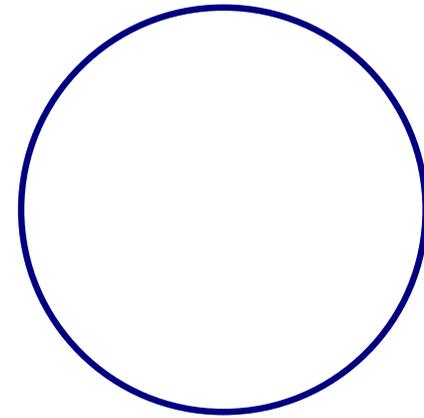
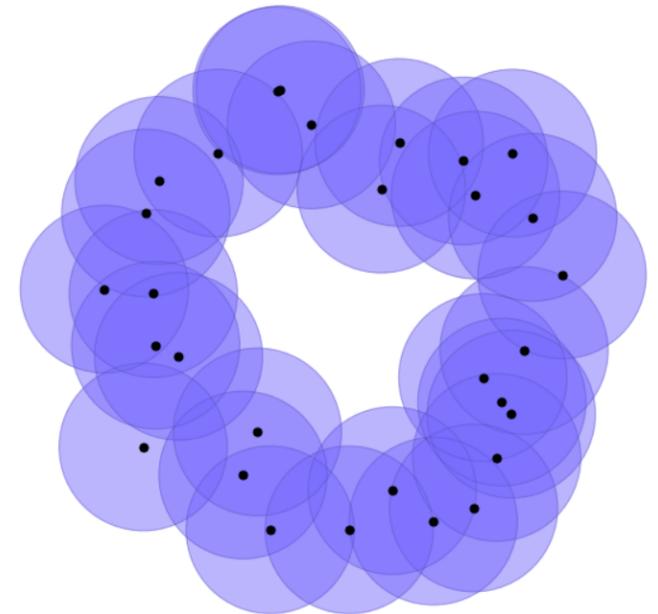
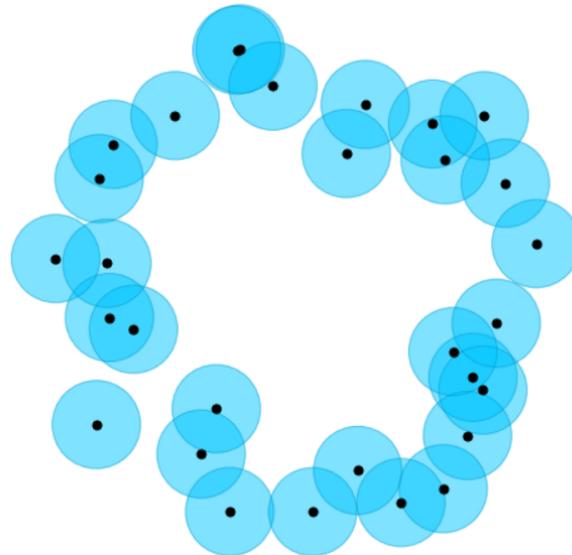
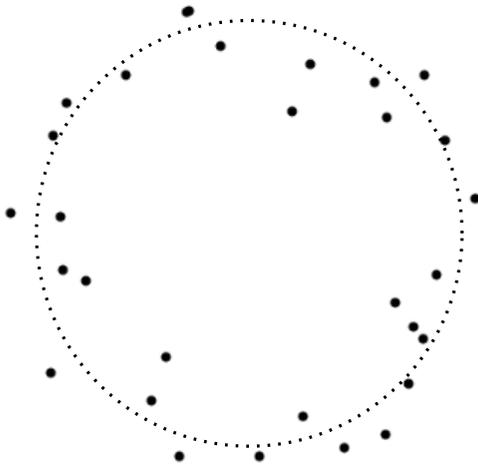
Filtration de Čech

On a toujours un ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$.

Pour tout $t \geq 0$, on définit le t -épaississement

$$X^t = \bigcup_{x \in X} \overline{B}(x, t)$$

où $\overline{B}(x, t)$ représente la boule fermée.

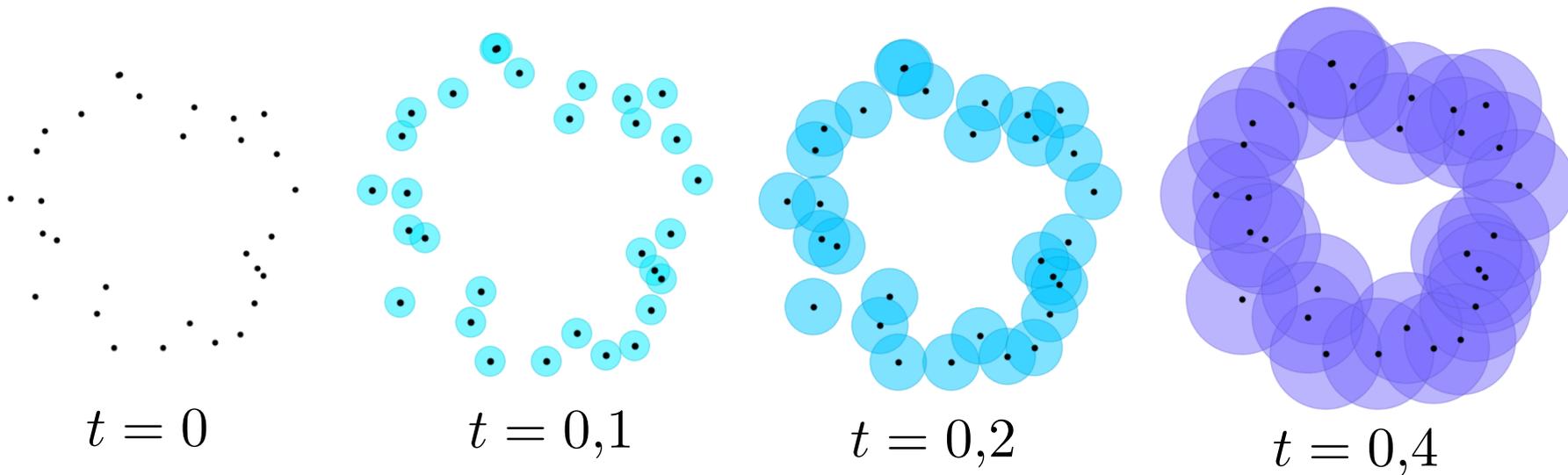


\simeq

Esperance : pour certaines valeurs de t , l'épaississement X^t est du même type d'homotopie que l'objet sous-jacent \mathcal{M}

Module de persistance associé à la filtration de Čech

Pour tout $t \geq 0$, on calcule les groupes d'homologie de X^t .



$H_0(X^t)$

$$\mathbb{Z}_2^{30}$$

$$\mathbb{Z}_2^{23}$$

$$\mathbb{Z}_2^3$$

$$\mathbb{Z}_2$$

$H_1(X^t)$

$$0$$

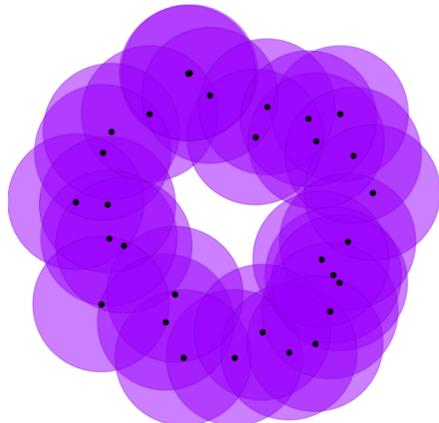
$$0$$

$$0$$

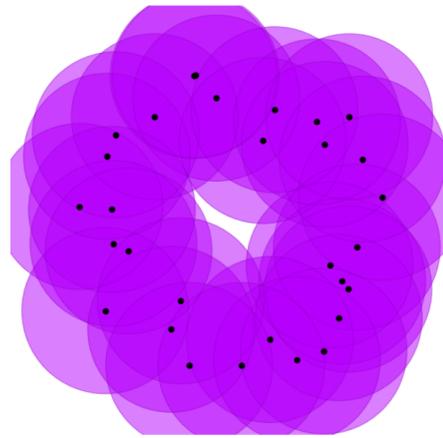
$$\mathbb{Z}_2$$

Module de persistance associé à la filtration de Čech

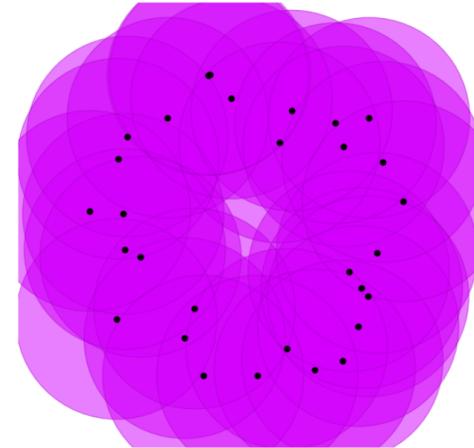
Pour tout $t \geq 0$, on calcule les groupes d'homologie de X^t .



$t = 0,5$



$t = 0,6$



$t = 0,7$

$H_0(X^t)$

\mathbb{Z}_2

\mathbb{Z}_2

\mathbb{Z}_2

$H_1(X^t)$

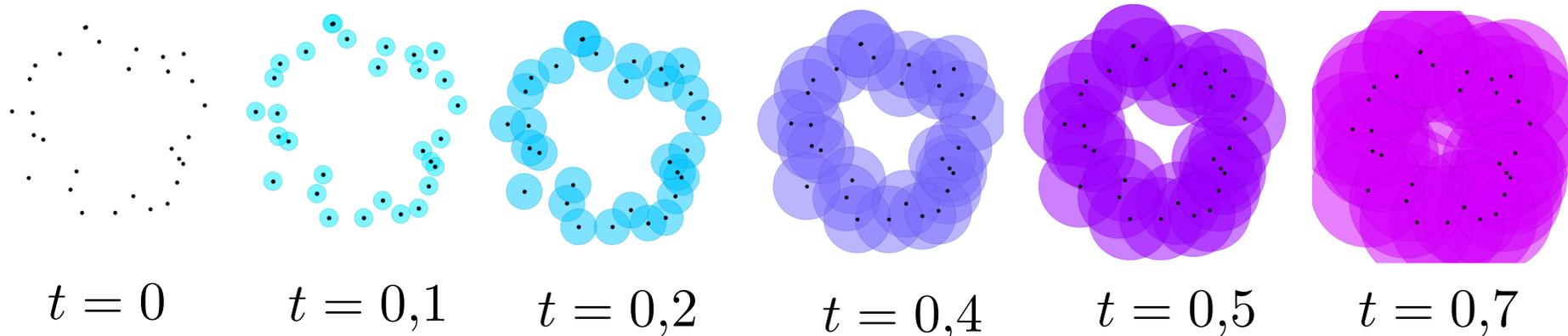
\mathbb{Z}_2

\mathbb{Z}_2

0

Module de persistance associé à la filtration de Čech

Pour tout $t \geq 0$, on calcule les groupes d'homologie de X^t .



$H_0(X^t)$	\mathbb{Z}_2^{30}	\mathbb{Z}_2^{23}	\mathbb{Z}_2^3	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
------------	---------------------	---------------------	------------------	----------------	----------------	----------------

$H_1(X^t)$	0	0	0	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0
------------	---	---	---	----------------	----------------	---

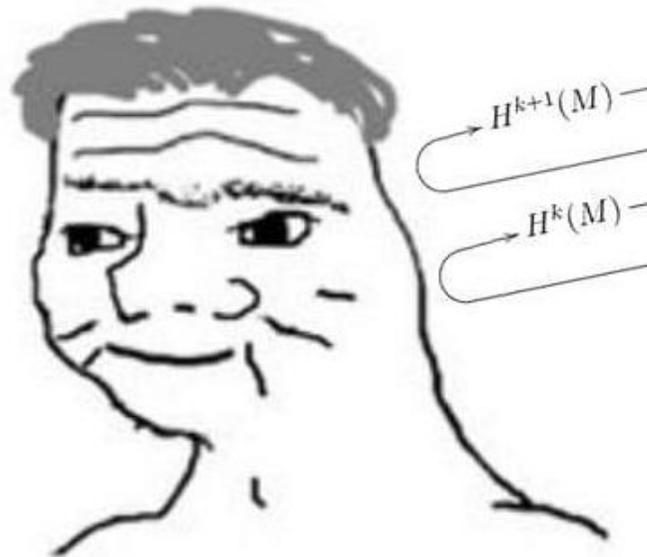
En pratique, comment choisir une bonne valeur de t ?

How to choose a value of t such that the t -thickening has the homotopy type of the underlying object ?

Choose them all.



Data analyst



Persistence theory

Module de persistance associé à la filtration de Čech

Soit $i \geq 0$.

Le *module de persistance* de i -ème homologie associé à la filtration de Čech $(X^t)_{t \geq 0}$ est le couple (V, v) où

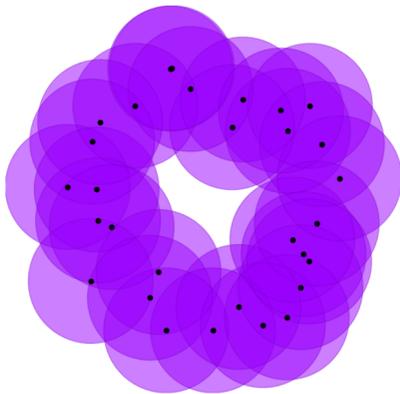
- $V = (H_i(X^t))_{t \geq 0}$ est la collection des i -èmes groupes d'homologie de chaque X^t
- $v = (v_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est la collection des applications $v_s^t: H_i(X^s) \rightarrow H_i(X^t)$ induites en homologie par les inclusions $X^s \hookrightarrow X^t$

Module de persistance associé à la filtration de Čech

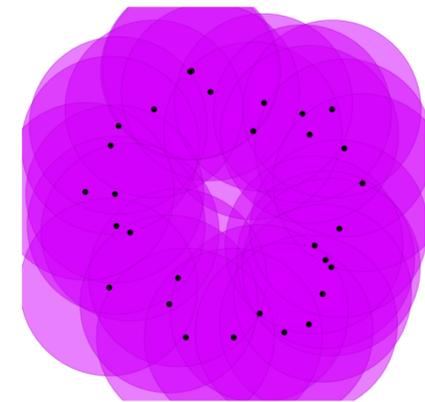
Soit $i \geq 0$.

Le *module de persistance* de i -ème homologie associé à la filtration de Čech $(X^t)_{t \geq 0}$ est le couple (V, v) où

- $V = (H_i(X^t))_{t \geq 0}$ est la collection des i -èmes groupes d'homologie de chaque X^t
- $v = (v_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est la collection des applications $v_s^t: H_i(X^s) \rightarrow H_i(X^t)$ induites en homologie par les inclusions $X^s \hookrightarrow X^t$

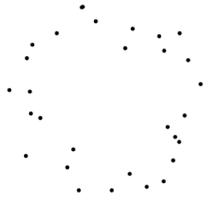


$$i_s^t: X^s \hookrightarrow X^t$$

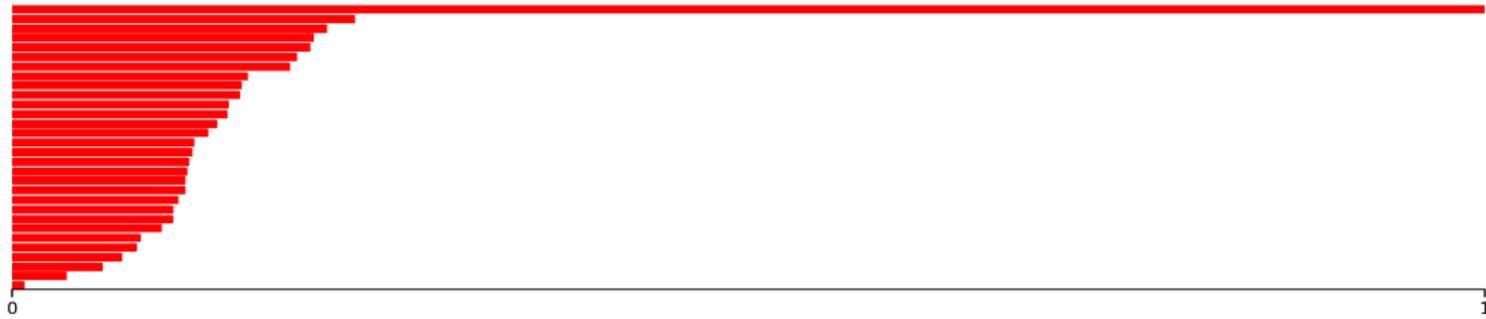


$$v_s^t = H_i(i_s^t): H_i(X^s) \longrightarrow H_i(X^t)$$

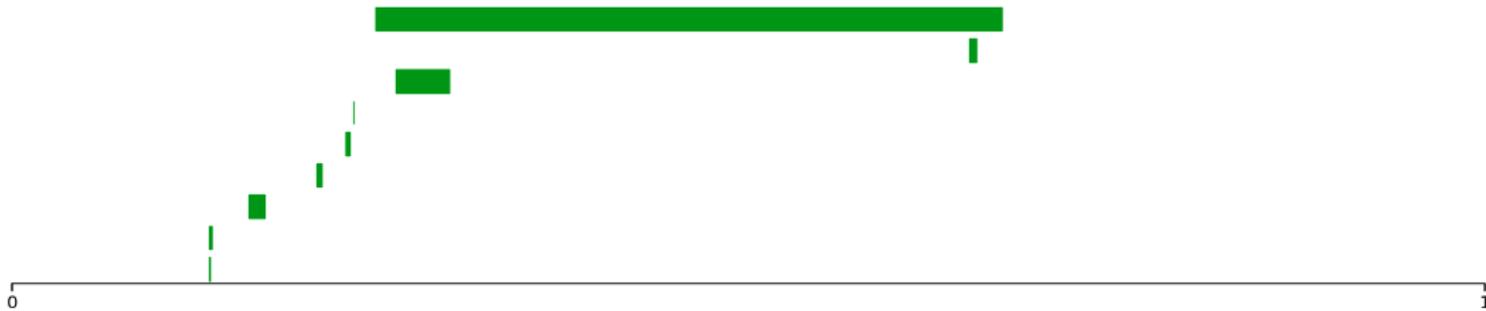
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



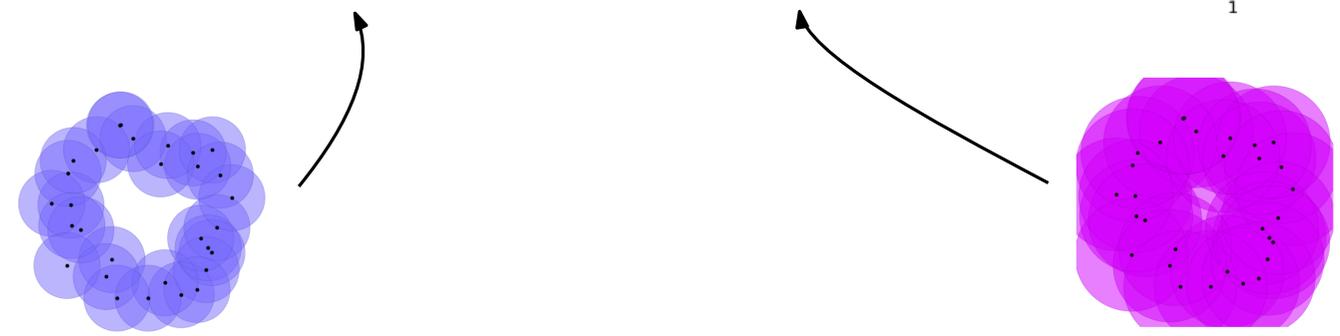
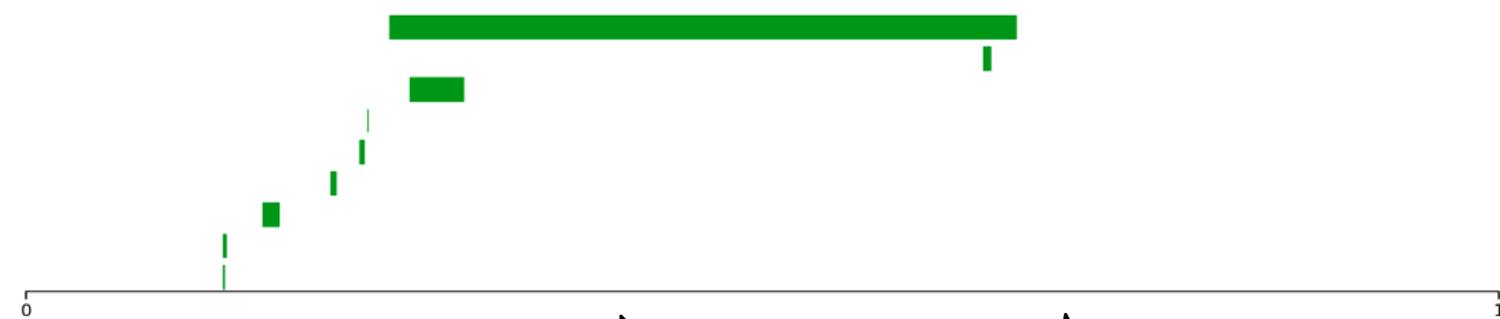
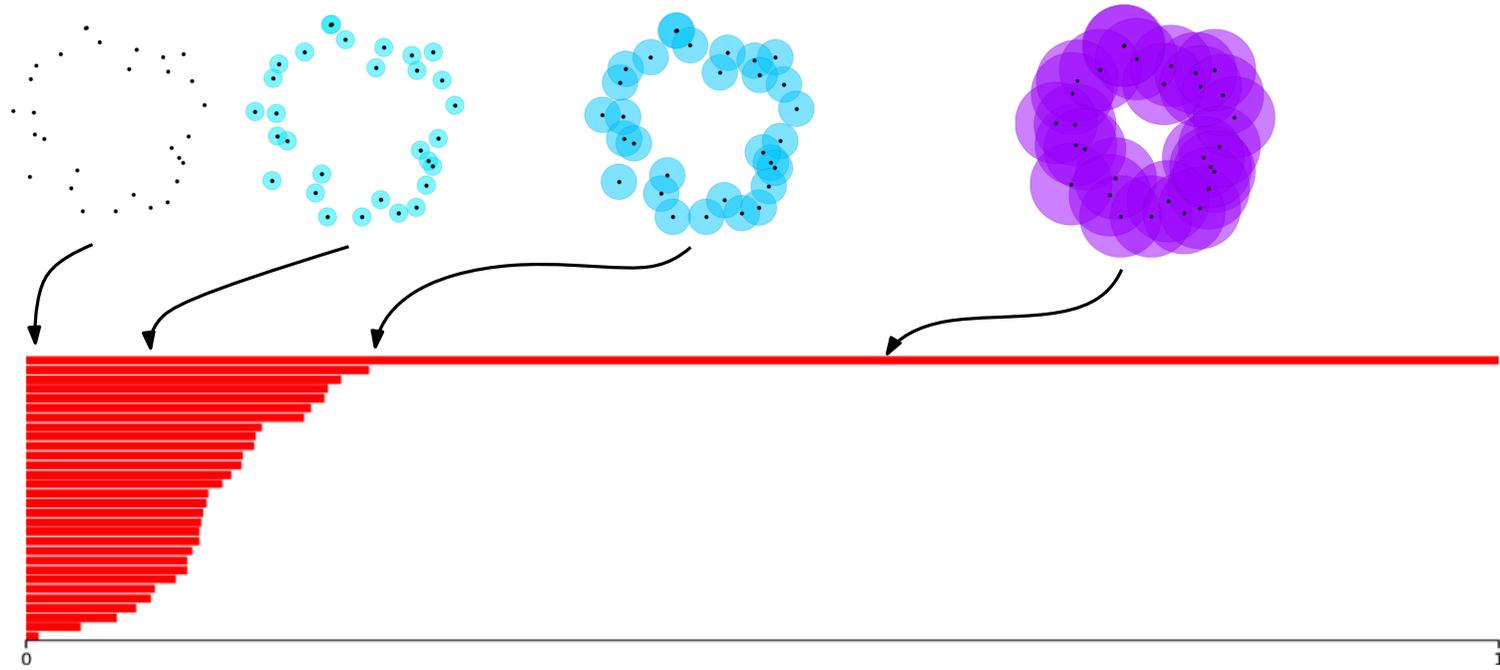
H_0



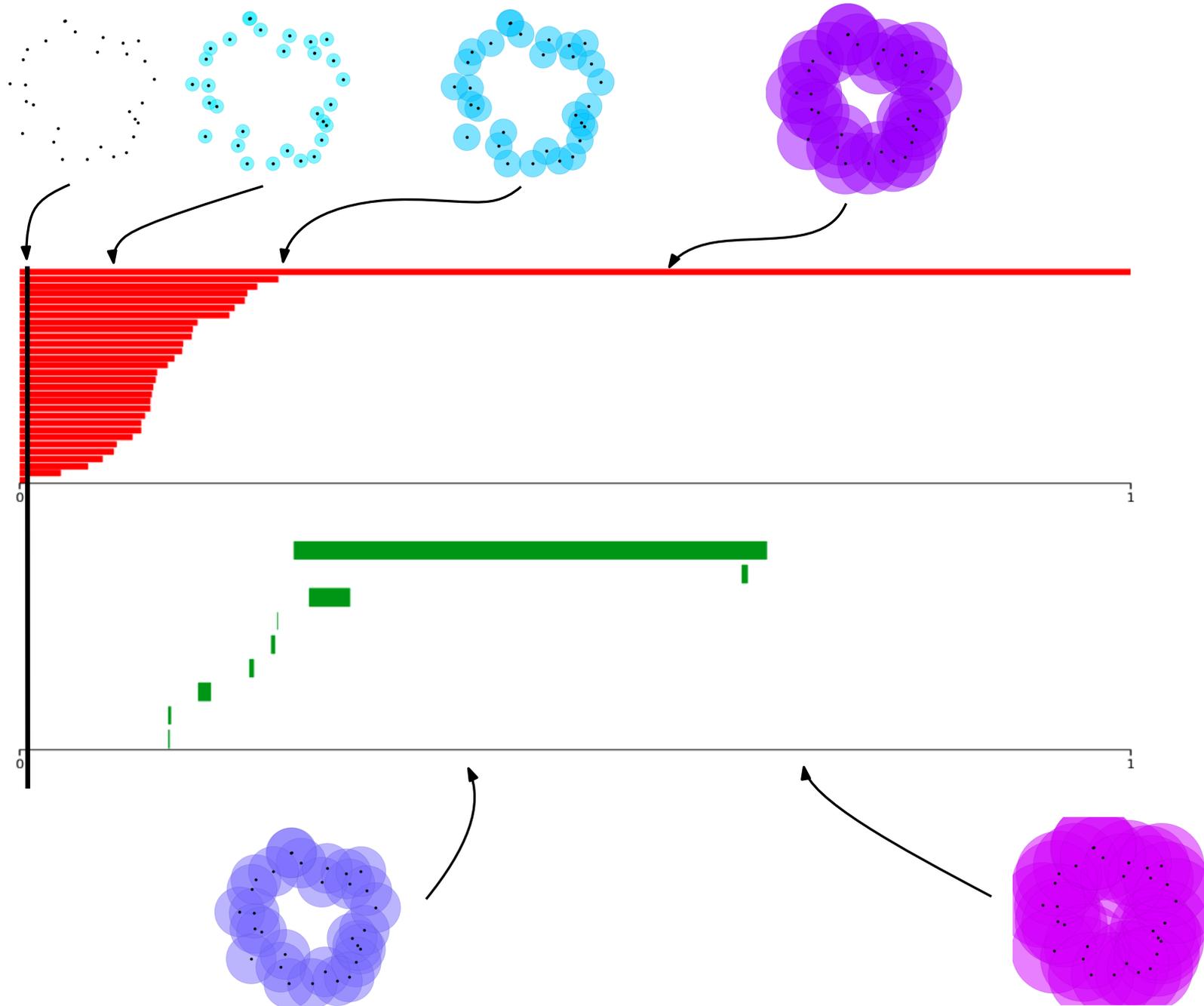
H_1



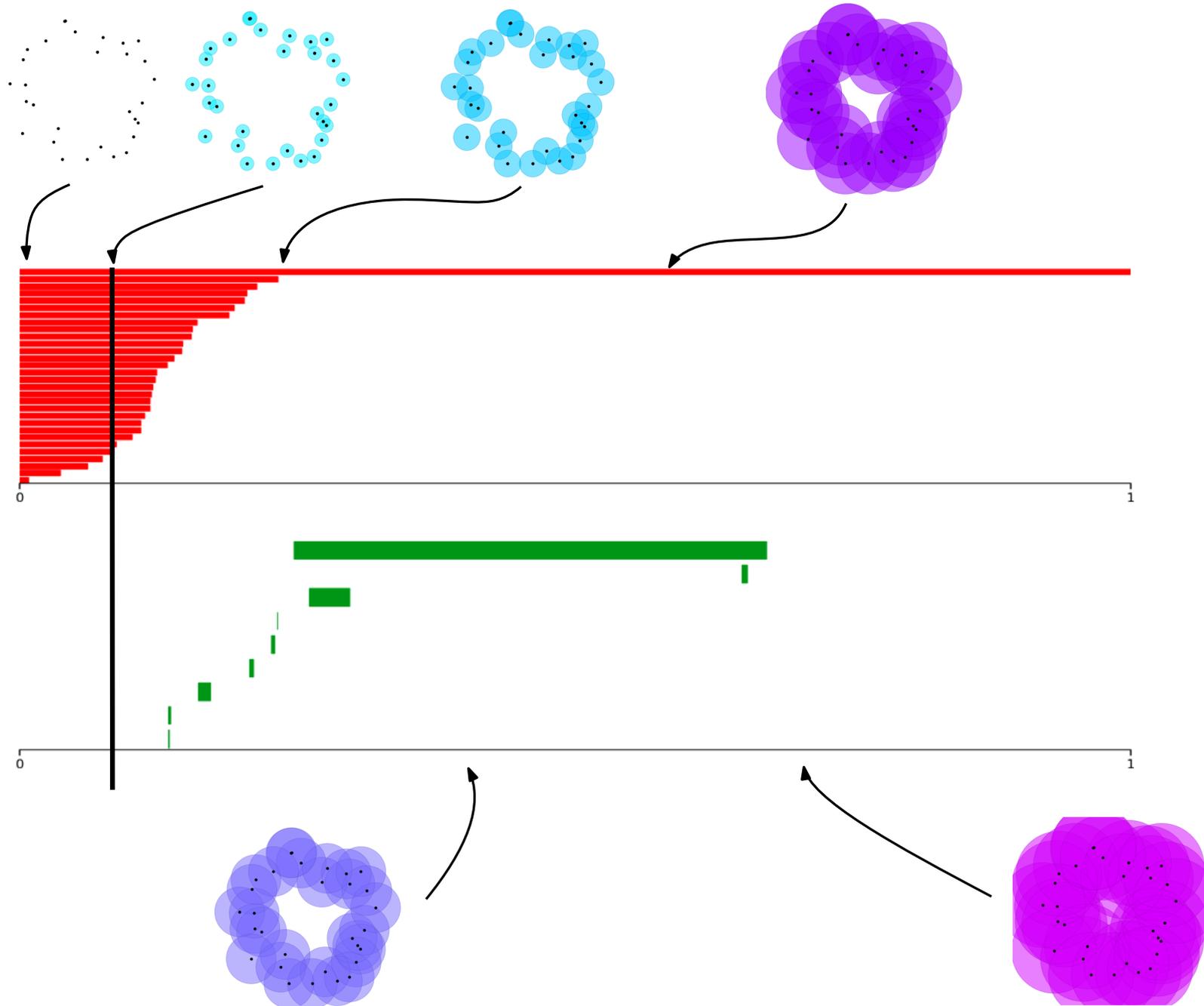
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



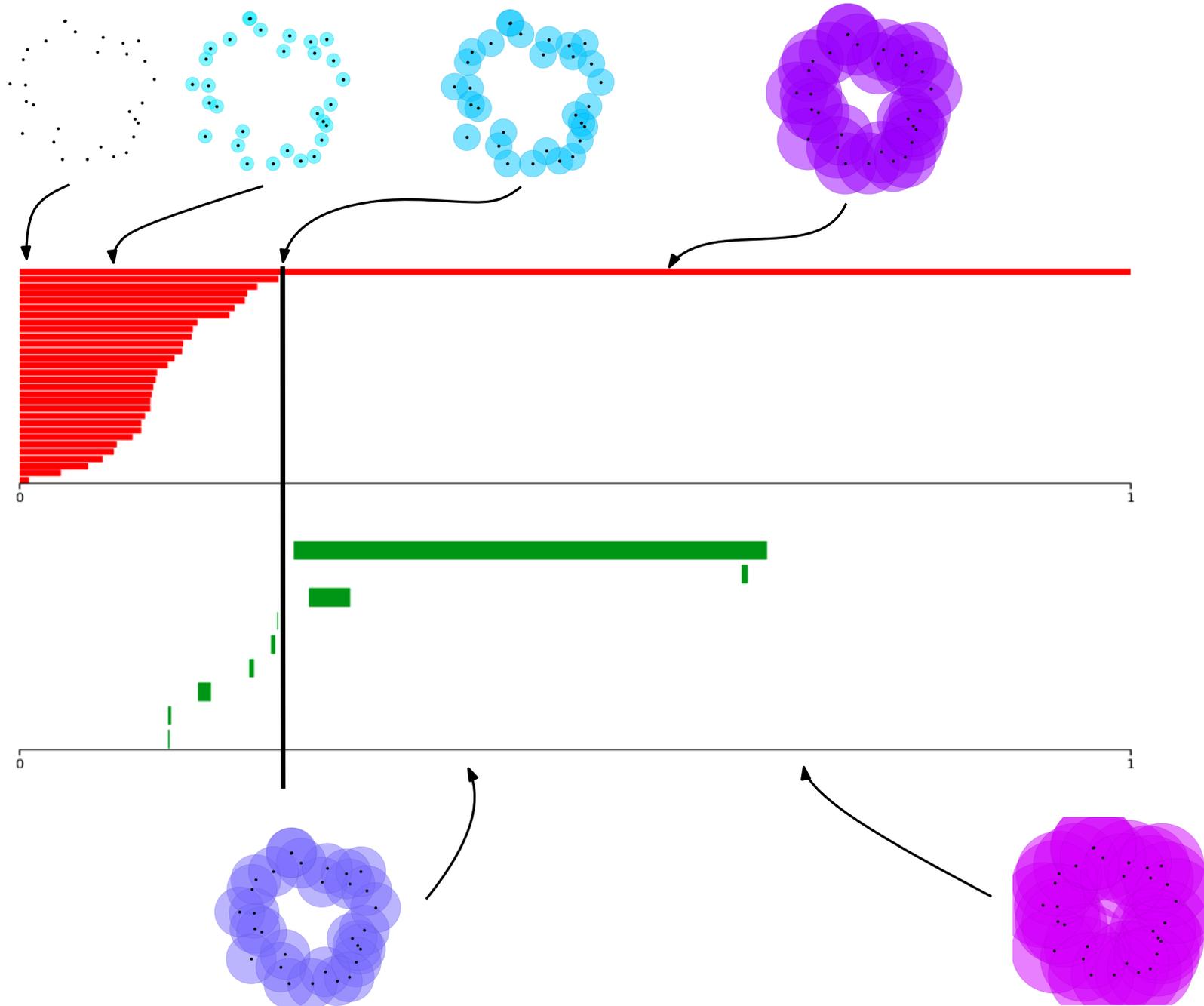
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



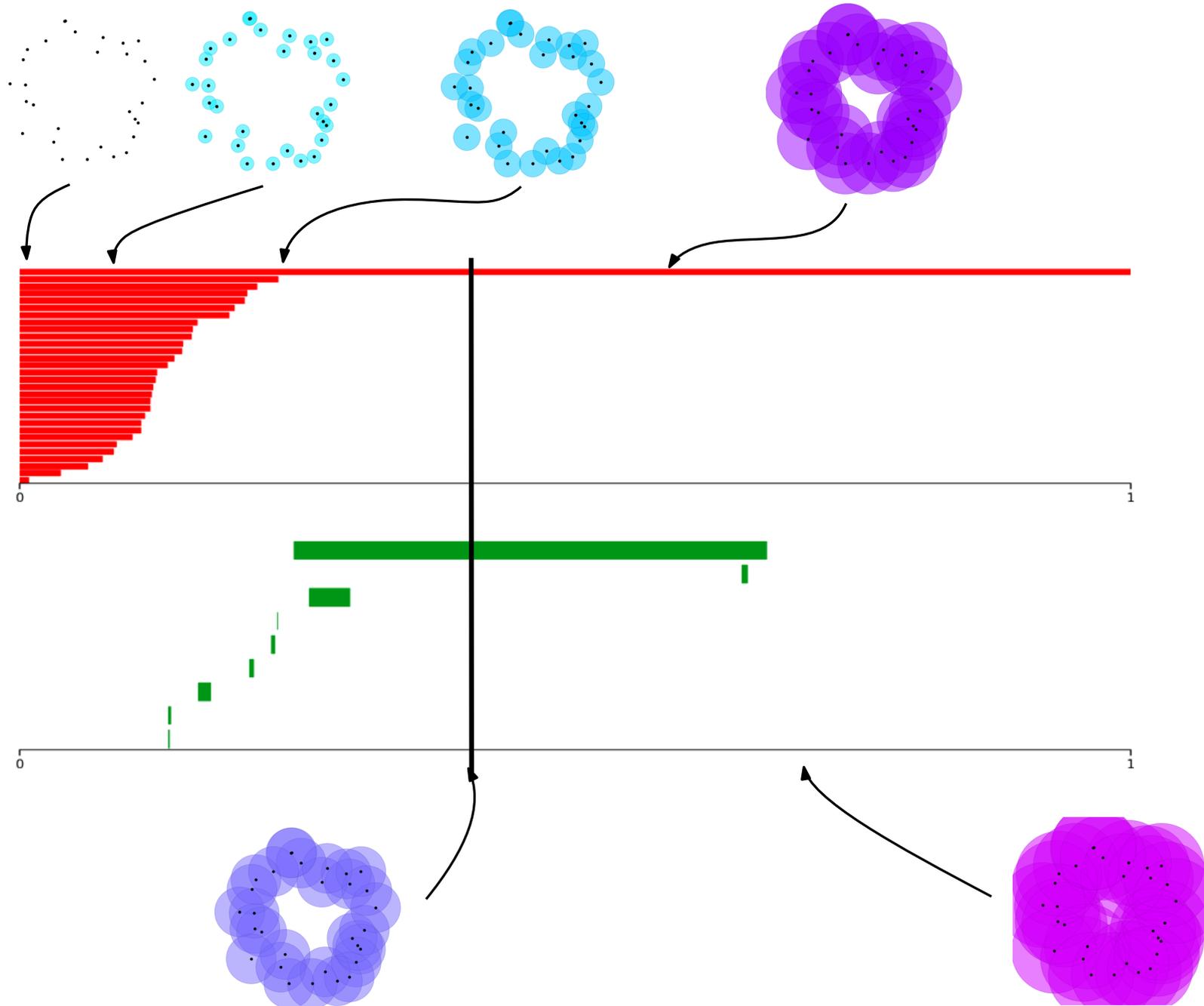
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



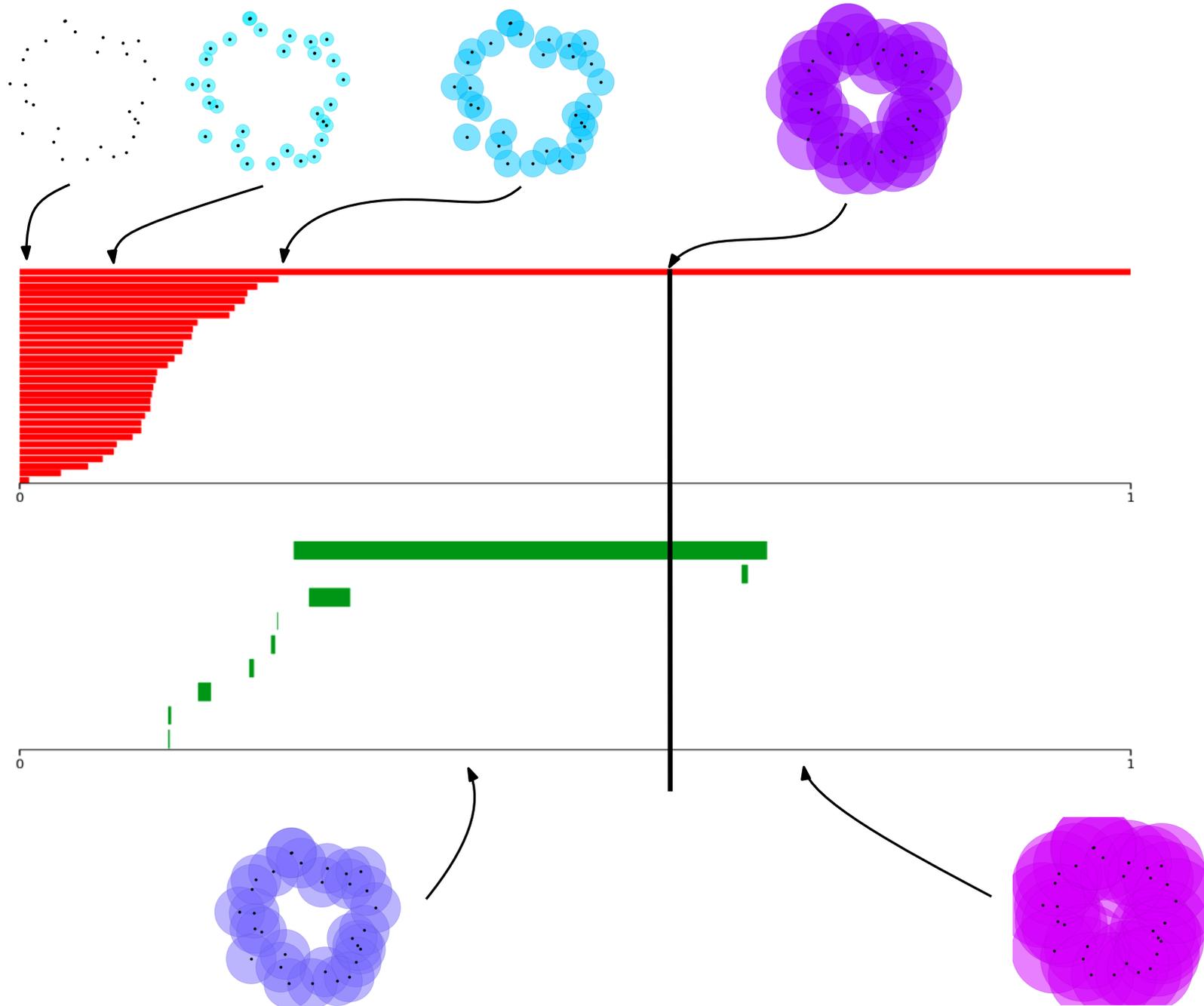
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



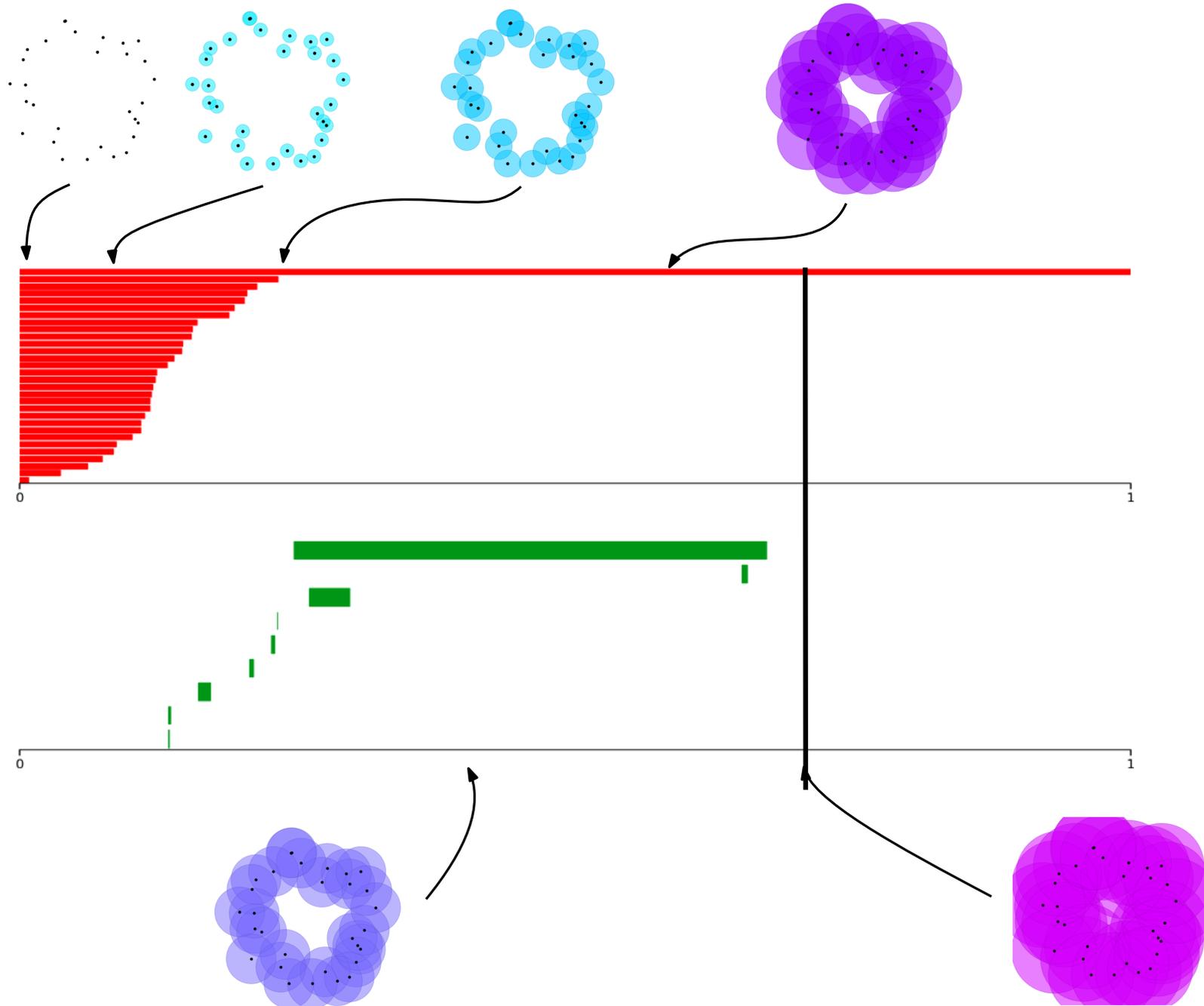
Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



Code-barre associé au module de persistance associé à la filtration de Čech



Algèbre persistante

Modules de persistance

Définition :

Un *module de persistance* est la donnée d'un couple (V, v) où

- $V = (V^t)_{t \geq 0}$ est une collection de \mathbb{Z}_2 -espaces vectoriels
- $v = (v_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est une collection d'applications linéaires $v_s^t: V^s \rightarrow V^t$

En plus, on demande que :

- pour tout t , v_t^t est l'identité
- pour tout r, s, t avec $r \leq s \leq t$, on ait $v_s^t \circ v_r^s = v_r^t$

Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccc} V^r & \xrightarrow{v_r^s} & V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t. \\ & & & \searrow & \\ & & & & v_r^t \end{array}$$

Modules de persistance

Définition :

Un *module de persistance* est la donnée d'un couple (V, v) où

- $V = (V^t)_{t \geq 0}$ est une collection de \mathbb{Z}_2 -espaces vectoriels
- $v = (v_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est une collection d'applications linéaires $v_s^t: V^s \rightarrow V^t$

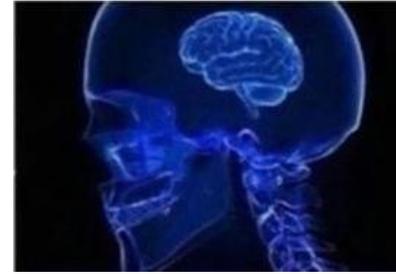
En plus, on demande que :

- pour tout t , v_t^t est l'identité
- pour tout r, s, t avec $r \leq s \leq t$, on ait $v_s^t \circ v_r^s = v_r^t$

Définition :

Un *module de persistance* est un foncteur

$$V: (\mathbb{R}^+, \leq) \longrightarrow \text{Vec}_{\mathbb{Z}_2}$$



Modules de persistance

Définition :

Un *module de persistance* est la donnée d'un couple (V, v) où

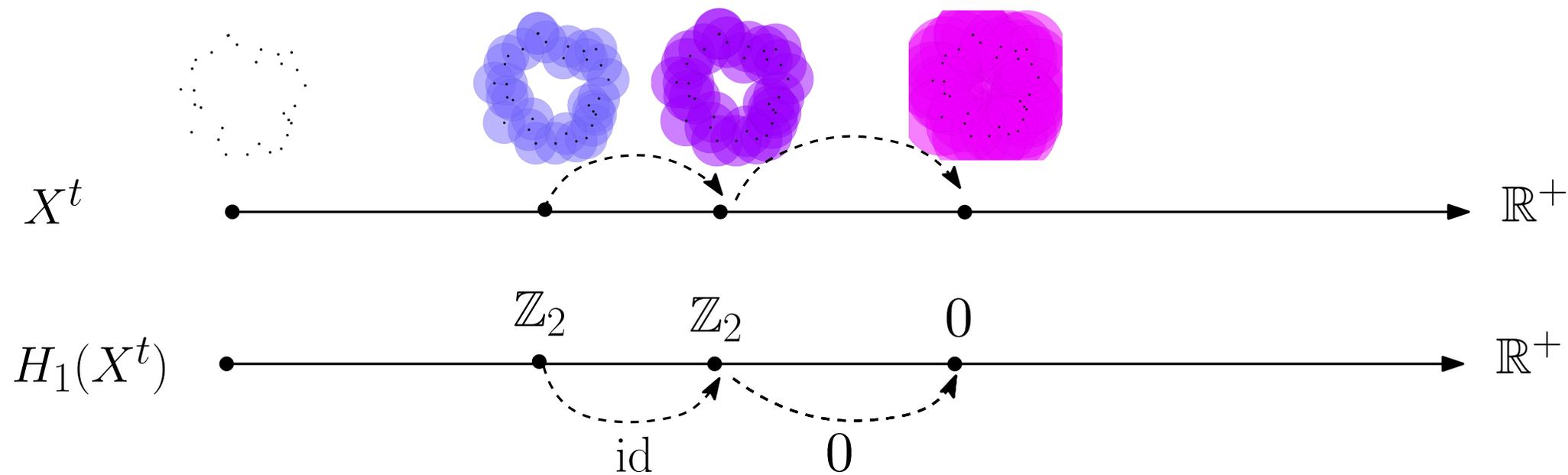
- $V = (V^t)_{t \geq 0}$ est une collection de \mathbb{Z}_2 -espaces vectoriels
- $v = (v_s^t)_{0 \leq s \leq t}$ est une collection d'applications linéaires $v_s^t: V^s \rightarrow V^t$

En plus, on demande que :

- pour tout t , v_t^t est l'identité
- pour tout r, s, t avec $r \leq s \leq t$, on ait $v_s^t \circ v_r^s = v_r^t$

Exemple

Le module de persistance associé à la filtration de Čech de X est un module de persistance



Algèbre persistante

Chapitre II : Décomposition des modules de persistance

Modules-intervalles

Définition :

Soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ . On définit le module de persistance $V(I)$ par :

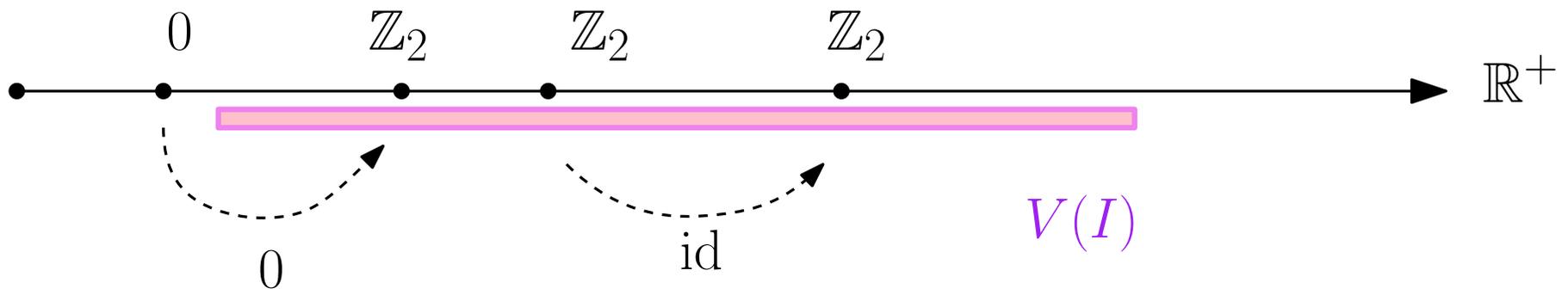
- pour $t \geq 0$, l'espace vectoriel $V^t = \mathbb{Z}_2$ si $t \in I$,
 $= 0$ sinon.
- pour $s \leq t$, l'application linéaire $v_s^t = \text{id}$ si $s, t \in I$,
 $= 0$ sinon.

Modules-intervalles

Définition :

Soit I un intervalle de \mathbb{R}^+ . On définit le module de persistance $V(I)$ par :

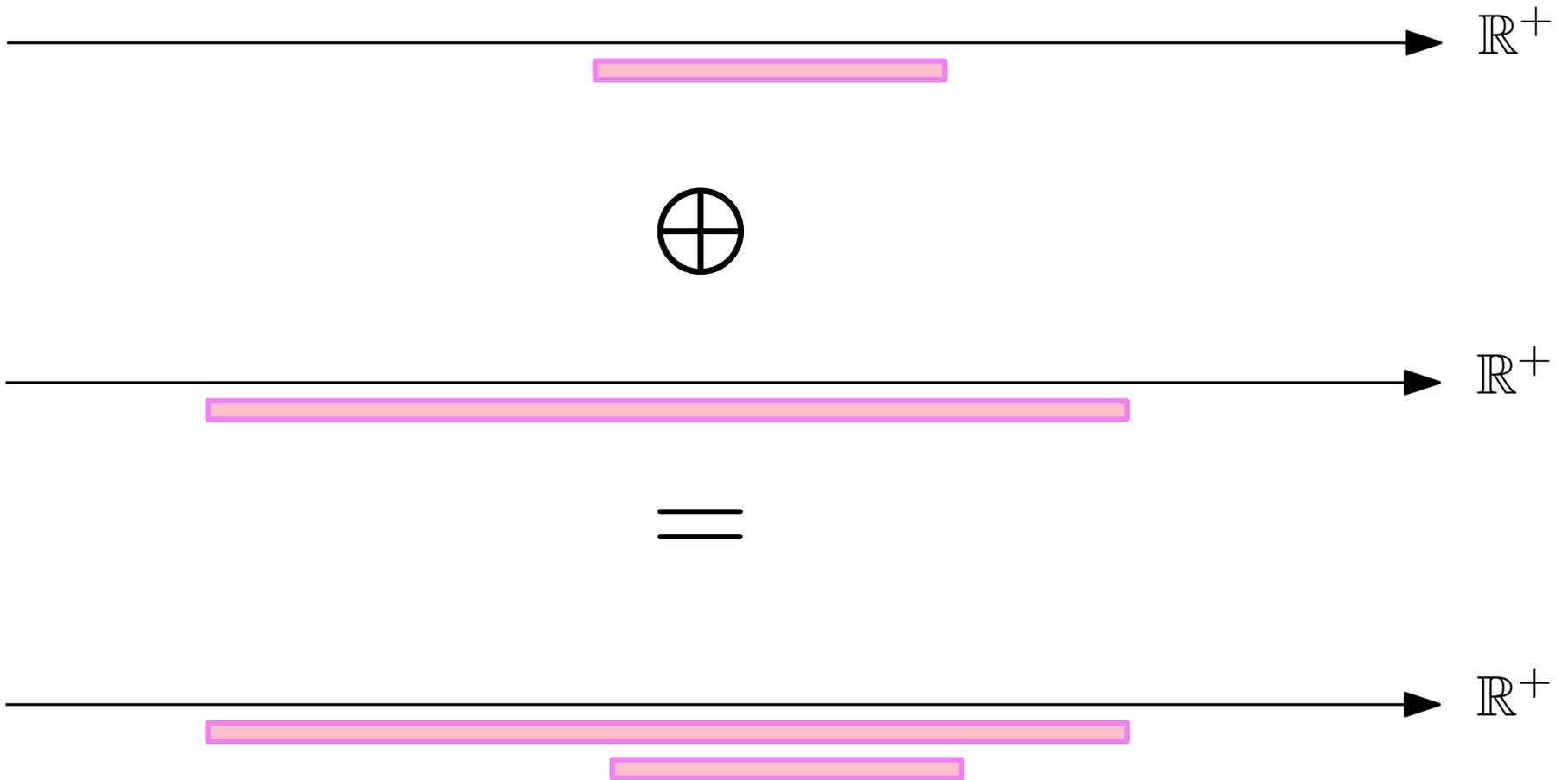
- pour $t \geq 0$, l'espace vectoriel $V^t = \mathbb{Z}_2$ si $t \in I$,
 $= 0$ sinon.
- pour $s \leq t$, l'application linéaire $v_s^t = \text{id}$ si $s, t \in I$,
 $= 0$ sinon.



Modules-intervalles

On peut définir la somme de deux modules de persistance $U \oplus V$.

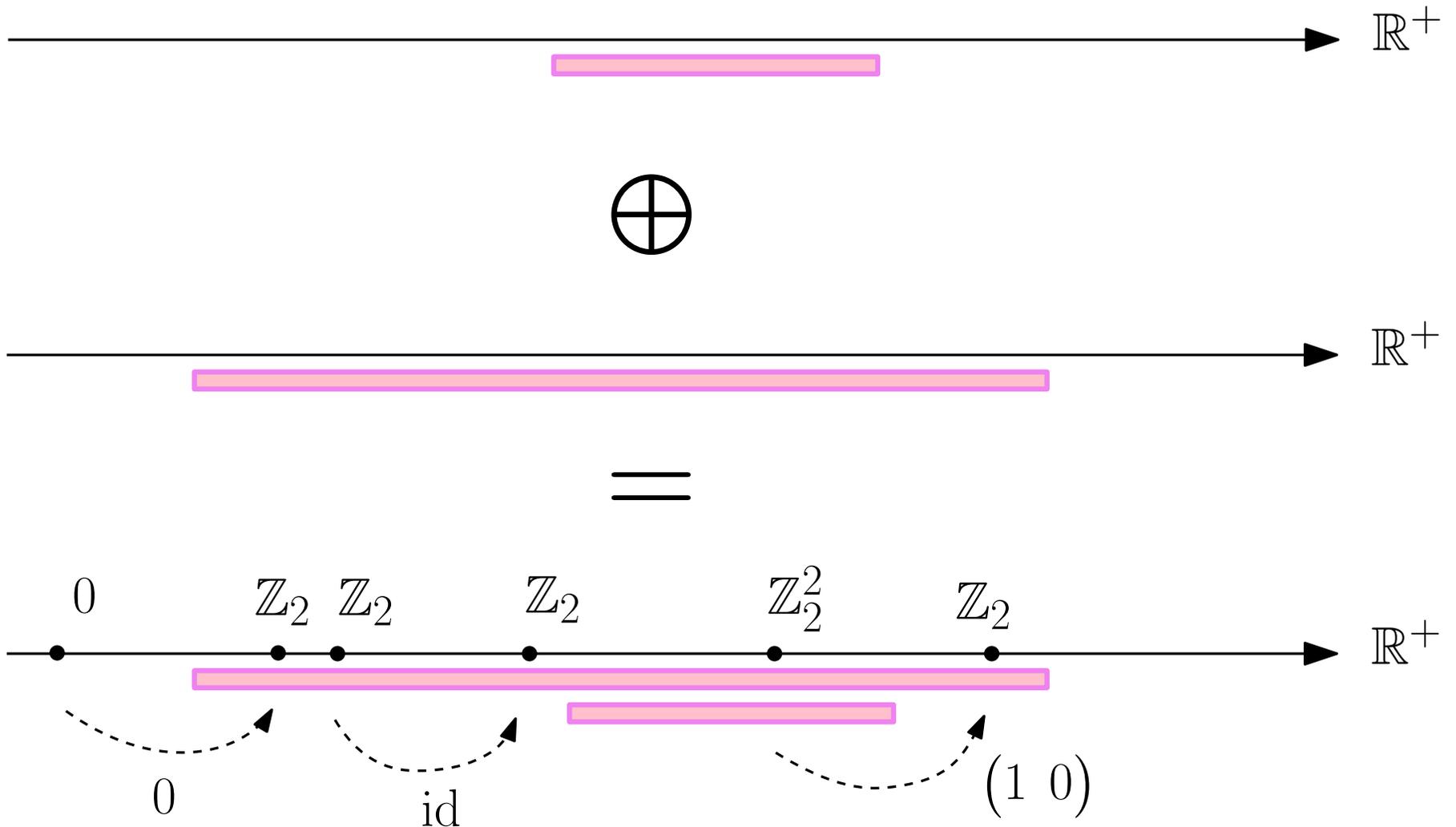
On particulier, on peut sommer des modules-intervalle.



Modules-intervalles

On peut définir la somme de deux modules de persistance $U \oplus V$.

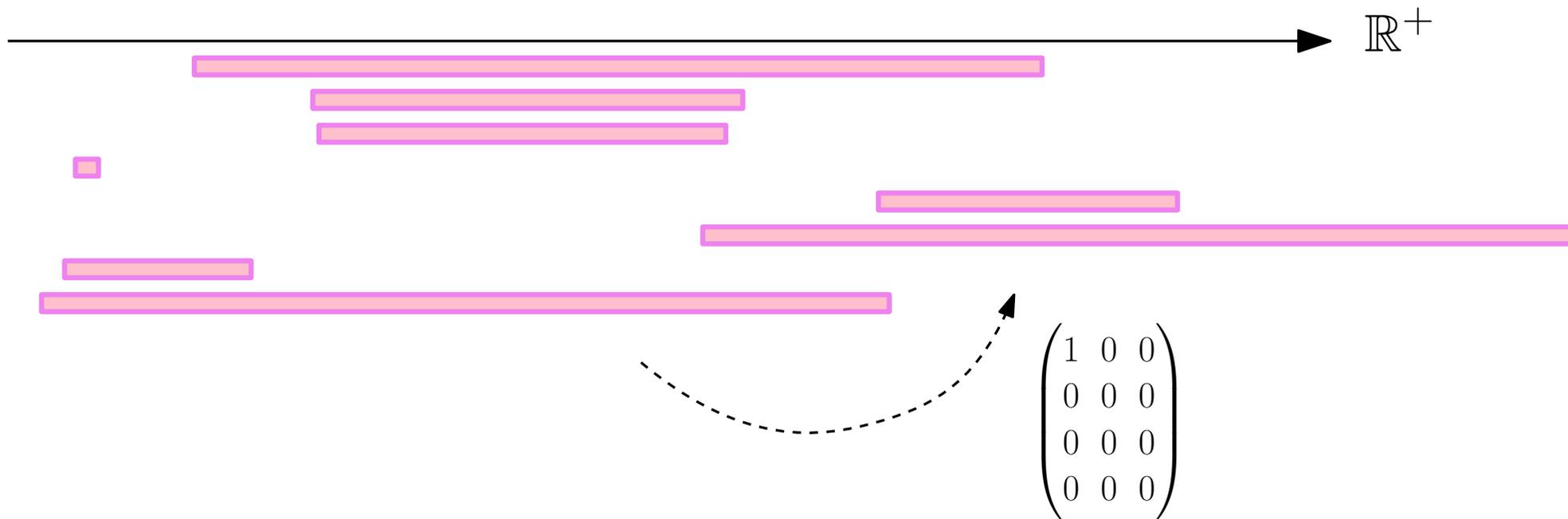
On particulier, on peut sommer des modules-intervalle.



Modules-intervalles

On peut définir la somme de deux modules de persistance $U \oplus V$.

On particulier, on peut sommer des modules-intervalle.



Décomposition en modules intervalles

Deux modules de persistance V et W sont isomorphes s'il existe une famille d'isomorphismes $(\phi^t: V^t \rightarrow W^t)$ tels que le diagramme suivant commute en tout s, t :

$$\begin{array}{ccc} V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ W^{s+\epsilon} & \xrightarrow{w_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & W^{t+\epsilon} \end{array}$$

Décomposition en modules intervalles

Deux modules de persistance V et W sont isomorphes s'il existe une famille d'isomorphismes $(\phi^t: V^t \rightarrow W^t)$ tels que le diagramme suivant commute en tout s, t :

$$\begin{array}{ccc} V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t \\ \downarrow \phi_s & & \downarrow \phi_t \\ W^{s+\epsilon} & \xrightarrow{w_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & W^{t+\epsilon} \end{array}$$

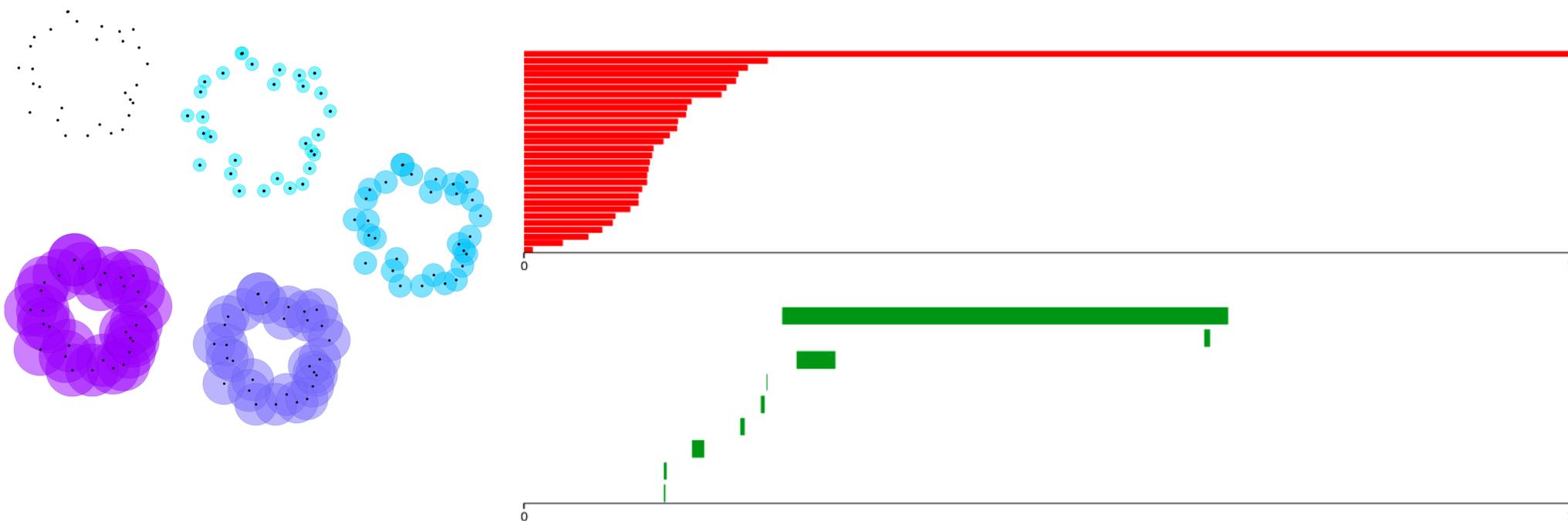
Définition :

Un module de persistance V est décomposable en modules-intervalle s'il existe une famille d'intervalles $(I_k)_{k \in K}$ telle que V soit isomorphe à $\bigoplus_{k \in K} V(I_k)$.

Décomposition en modules intervalles

Théorème [Crawley-Boevey, 2012] :

Si V est partout de dimension finie, i.e., V^t est de dimension finie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors il est décomposable en modules-intervalle.



Définition :

Un module de persistance V est décomposable en modules-intervalle s'il existe une famille d'intervalles $(I_k)_{k \in K}$ telle que V soit isomorphe à $\bigoplus_{k \in K} V(I_k)$.

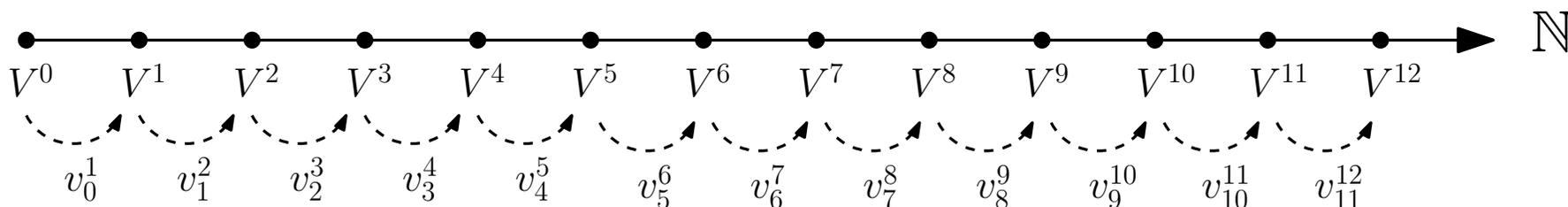
Décomposition en modules intervalles

Théorème [Crawley-Boevey, 2012] :

Si V est partout de dimension finie, i.e., V^t est de dimension finie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors il est décomposable en modules-intervalle.

Preuve [Zomorodian, Carlsson, 2005] :

Dans le cas où \mathbb{R}^+ est remplacé par \mathbb{N} .



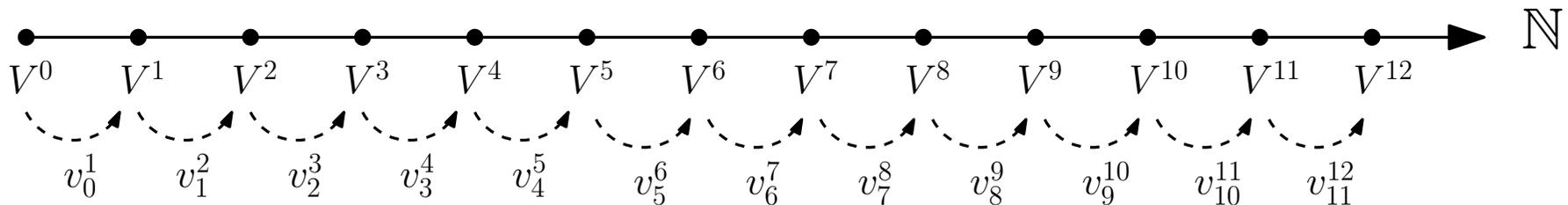
Décomposition en modules intervalles

Théorème [Crawley-Boevey, 2012] :

Si V est partout de dimension finie, i.e., V^t est de dimension finie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors il est décomposable en modules-intervalle.

Preuve [Zomorodian, Carlsson, 2005] :

Dans le cas où \mathbb{R}^+ est remplacé par \mathbb{N} .



On construit l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} V^i = V^0 \times V^1 \times V^2 \times \dots$

On munit \mathcal{V} d'une action de $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$x \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, v_0^1(a_0), v_1^2(a_1), v_2^3(a_2), \dots)$$

Par classification des modules de type fini sur un anneau principal, \mathcal{V} se décompose en somme de composantes

$$\mathcal{V} = \mathbb{Z}_2[x]^k \bigoplus_i (\mathbb{Z}_2[x]/d_i \mathbb{Z}_2[x])$$

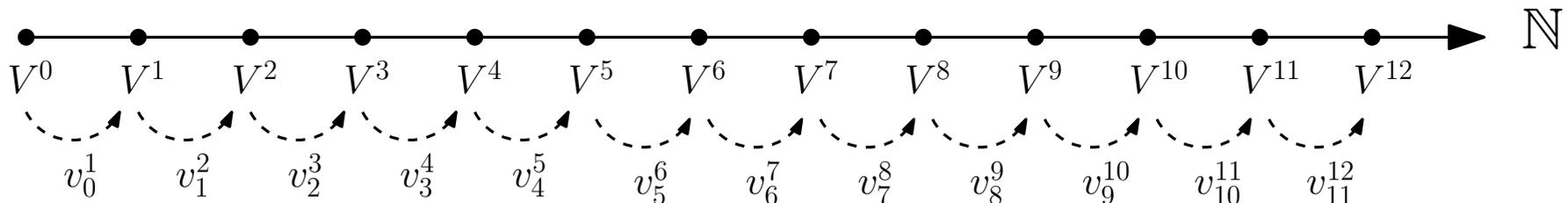
Décomposition en modules intervalles

Théorème [Crawley-Boevey, 2012] :

Si V est partout de dimension finie, i.e., V^t est de dimension finie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors il est décomposable en modules-intervalle.

Preuve [Zomorodian, Carlsson, 2005] :

Dans le cas où \mathbb{R}^+ est remplacé par \mathbb{N} .



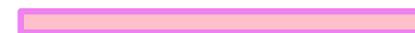
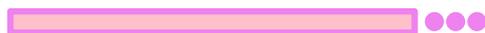
On construit l'espace vectoriel $\mathcal{V} = \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} V^i = V^0 \times V^1 \times V^2 \times \dots$

On munit \mathcal{V} d'une action de $\mathbb{Z}_2[x]$:

$$x \cdot (a_0, a_1, a_2, \dots) = (0, v_0^1(a_0), v_1^2(a_1), v_2^3(a_2), \dots)$$

Par classification des modules de type fini sur un anneau principal, \mathcal{V} se décompose en somme de composantes

$$\mathcal{V} = \mathbb{Z}_2[x]^k \bigoplus_i (\mathbb{Z}_2[x]/d_i \mathbb{Z}_2[x])$$



d_i

Algèbre persistante

Chapitre III : Stabilité

Distance d'entrelacement

Définition :

Un ϵ -entrelacement entre deux modules de persistance $((V^t), (v_s^t))$ et $((W^t), (w_s^t))$ est la donnée de deux familles de morphismes $(\phi^t: V^t \rightarrow W^{t+\epsilon})$ et $(\psi^t: W^t \rightarrow V^{t+\epsilon})$ telles qu'on ait des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t \\ \downarrow \phi^s & & \downarrow \phi^t \\ W^{s+\epsilon} & \xrightarrow{w_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & W^{t+\epsilon} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V^{s+\epsilon} & \xrightarrow{v_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & V^{t+\epsilon} \\ \psi^s \uparrow & & \psi^t \uparrow \\ W^s & \xrightarrow{w_s^t} & W^t \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V^t & \xrightarrow{v_t^{t+2\epsilon}} & V^{t+2\epsilon} \\ \searrow \phi^t & & \nearrow \psi^{t+\epsilon} \\ & W^{t+\epsilon} & \end{array}$$

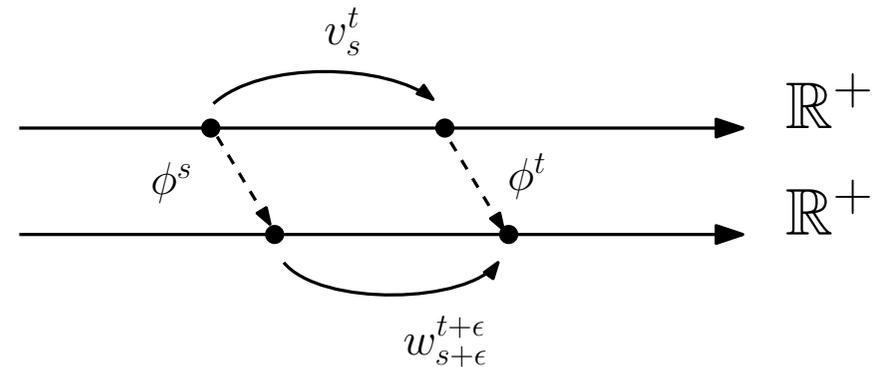
$$\begin{array}{ccc} & V^{t+\epsilon} & \\ \psi^t \nearrow & & \searrow \phi^{t+\epsilon} \\ W^t & \xrightarrow{w_t^{t+2\epsilon}} & W^{t+2\epsilon} \end{array}$$

Distance d'entrelacement

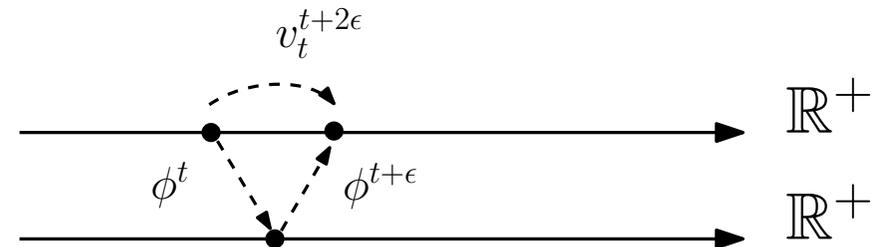
Définition :

Un ϵ -entrelacement entre deux modules de persistance $((V^t), (v_s^t))$ et $((W^t), (w_s^t))$ est la donnée de deux familles de morphismes $(\phi^t: V^t \rightarrow W^{t+\epsilon})$ et $(\psi^t: W^t \rightarrow V^{t+\epsilon})$ telles qu'on ait des diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t \\
 \downarrow \phi^s & & \downarrow \phi^t \\
 W^{s+\epsilon} & \xrightarrow{w_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & W^{t+\epsilon}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 V^t & \xrightarrow{v_t^{t+2\epsilon}} & V^{t+2\epsilon} \\
 \searrow \phi^t & & \nearrow \psi^{t+\epsilon} \\
 & W^{t+\epsilon} &
 \end{array}$$



Distance d'entrelacement

Définition :

La distance d'entrelacement entre les deux modules de persistance V et W est

$$d_i(V, W) = \inf\{\epsilon \geq 0, V \text{ et } W \text{ sont } \epsilon\text{-entrelacés}\}.$$

Distance d'entrelacement

Définition :

La distance d'entrelacement entre les deux modules de persistance V et W est

$$d_i(V, W) = \inf\{\epsilon \geq 0, V \text{ et } W \text{ sont } \epsilon\text{-entrelacés}\}.$$

Exemple :



ont pour distance d'entrelacement δ .

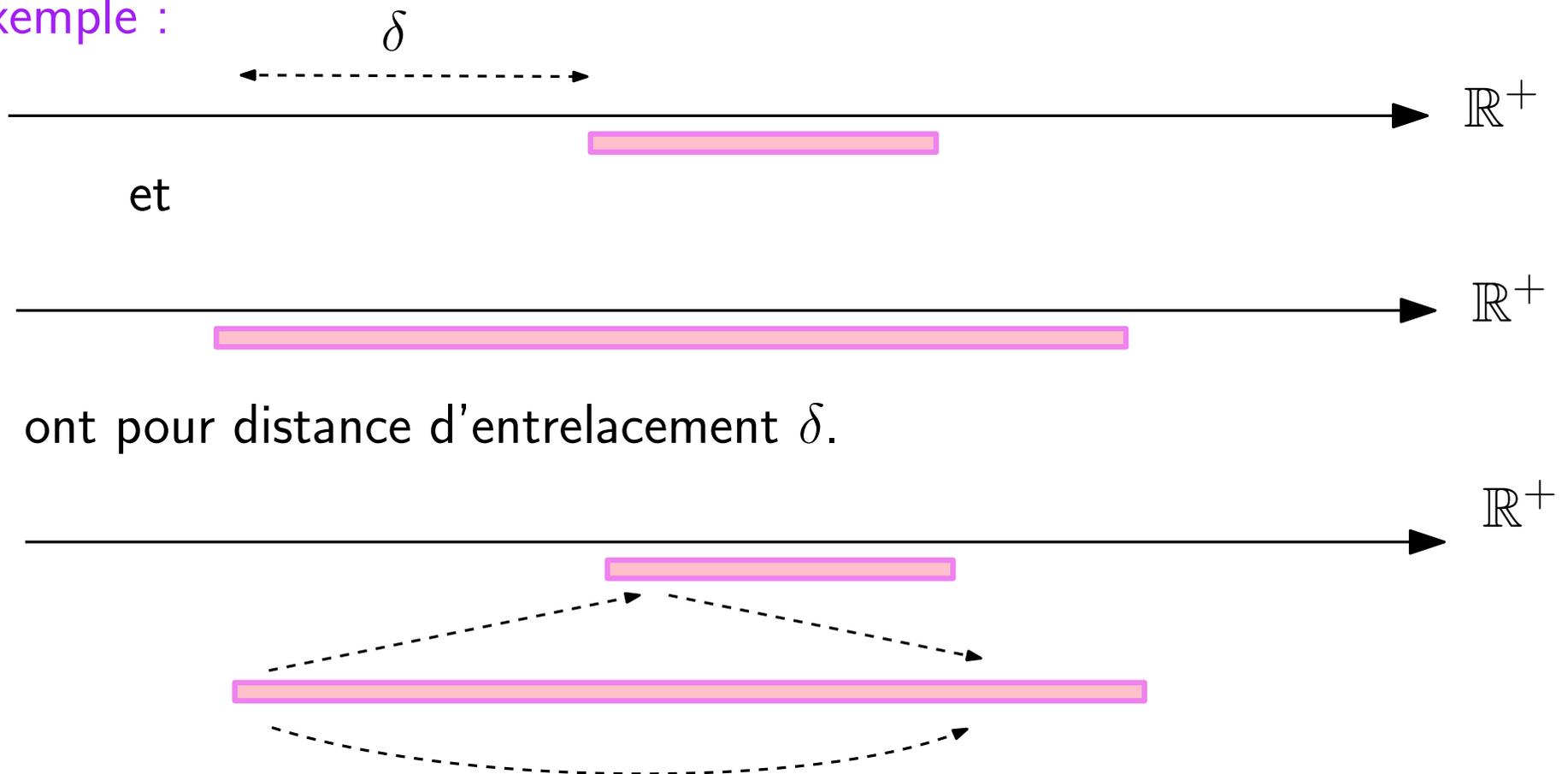
Distance d'entrelacement

Définition :

La distance d'entrelacement entre les deux modules de persistance V et W est

$$d_i(V, W) = \inf\{\epsilon \geq 0, V \text{ et } W \text{ sont } \epsilon\text{-entrelacés}\}.$$

Exemple :



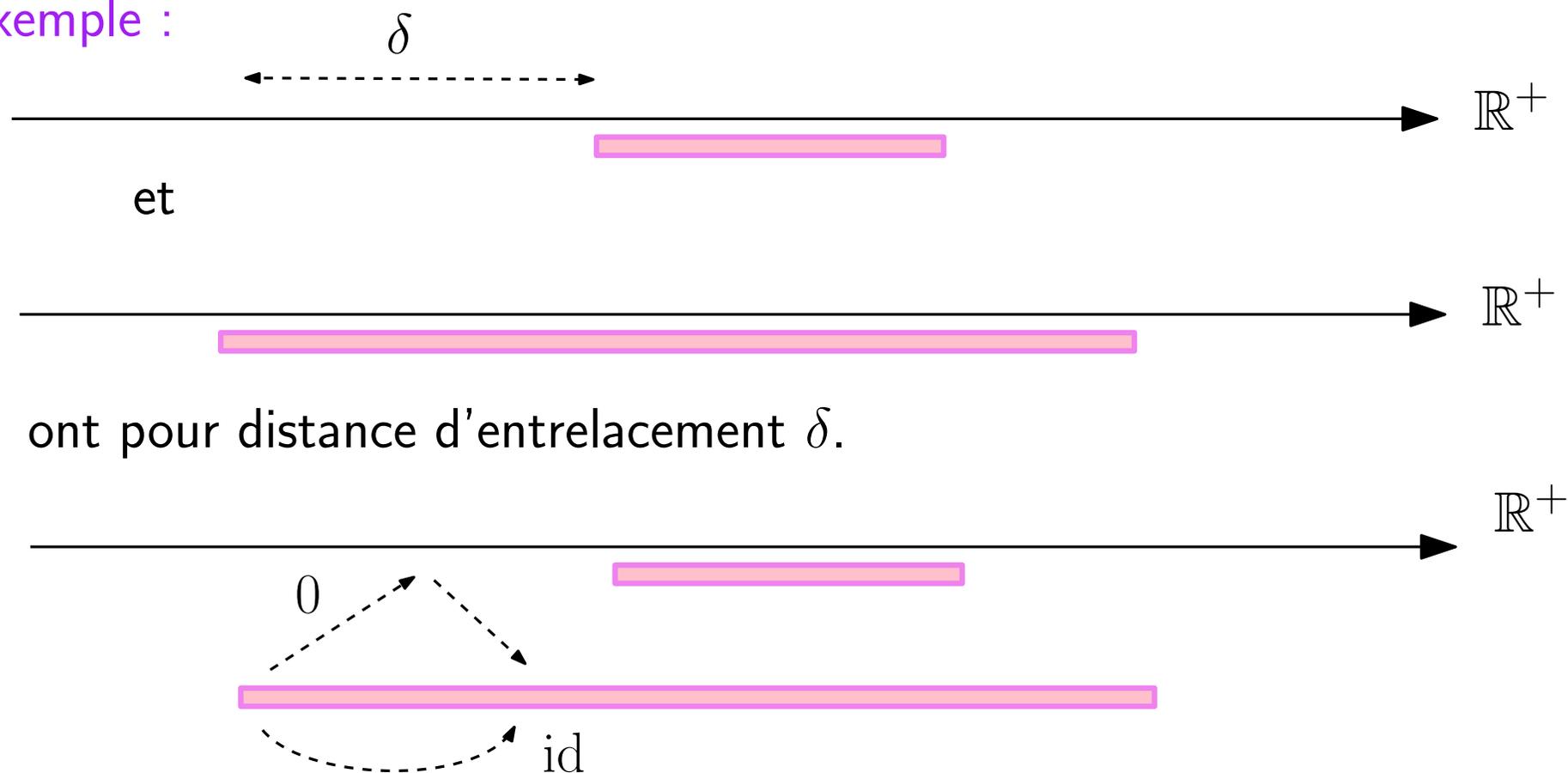
Distance d'entrelacement

Définition :

La distance d'entrelacement entre les deux modules de persistance V et W est

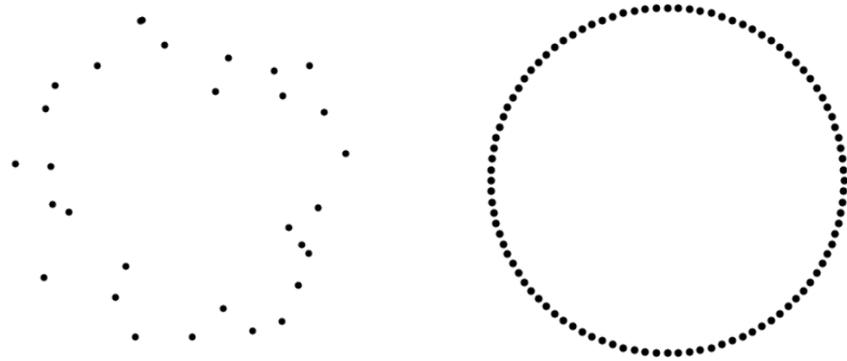
$$d_i(V, W) = \inf\{\epsilon \geq 0, V \text{ et } W \text{ sont } \epsilon\text{-entrelacés}\}.$$

Exemple :



Distance d'entrelacement

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, et ϵ leur distance de Hausdorff.

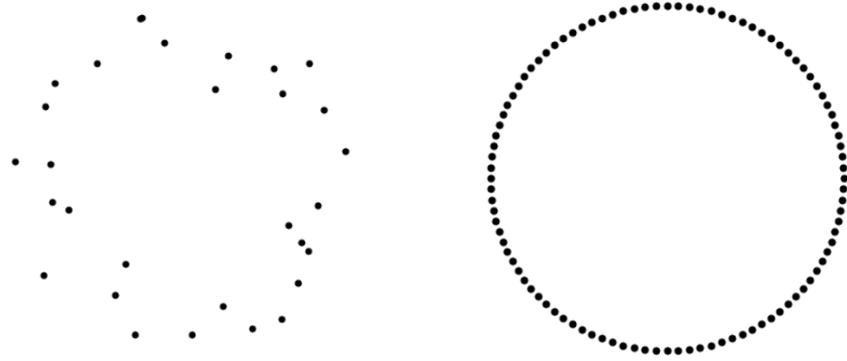


$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \begin{array}{l} \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \\ \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \end{array} \right\}$$

Alors les modules de persistance des filtrations de Čech correspondantes sont ϵ -entrelacés.

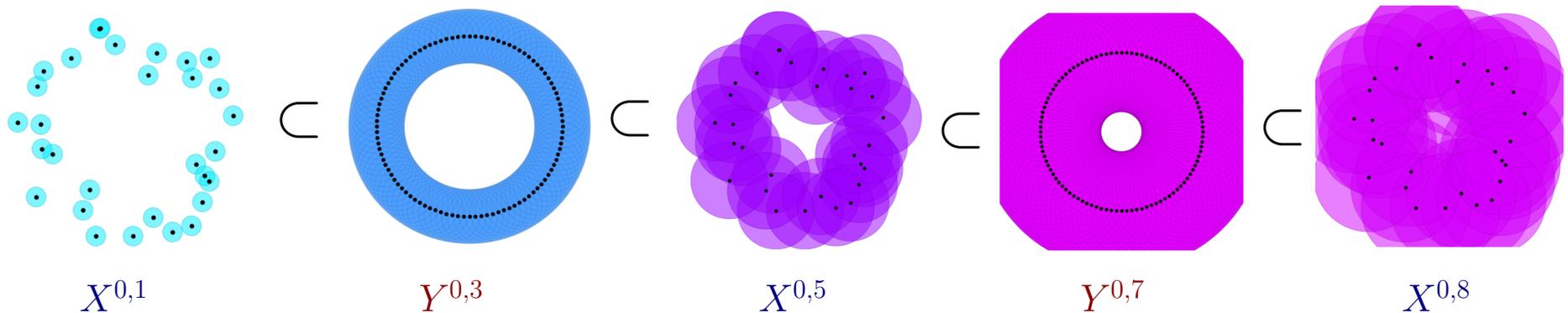
Distance d'entrelacement

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, et ϵ leur distance de Hausdorff.



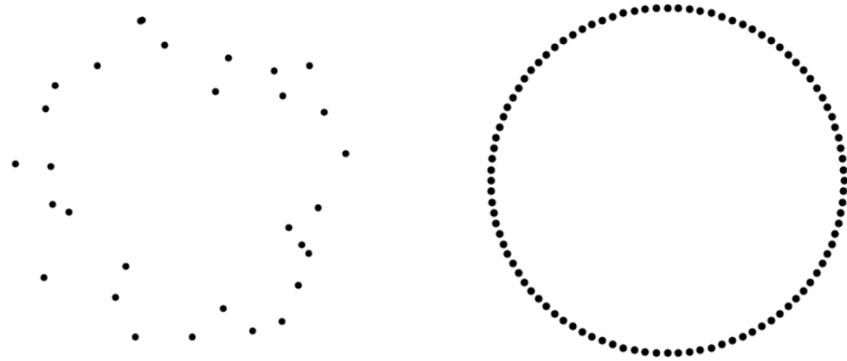
$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \begin{aligned} &\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \\ &\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \end{aligned} \right\}$$

Alors les modules de persistance des filtrations de Čech correspondantes sont ϵ -entrelacés.



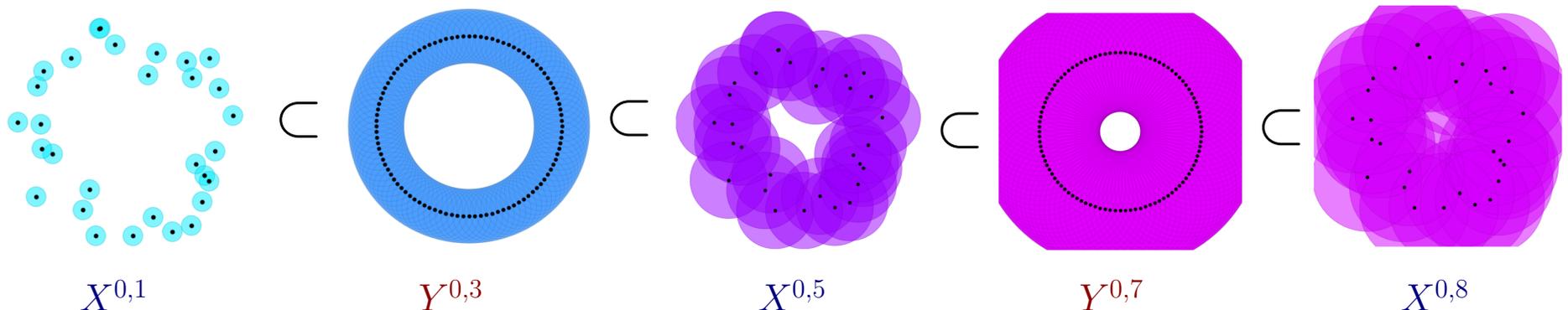
Distance d'entrelacement

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, et ϵ leur distance de Hausdorff.



$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \begin{aligned} &\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \\ &\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \end{aligned} \right\}$$

Alors les modules de persistance des filtrations de Čech correspondantes sont ϵ -entrelacés.



$H_i(X^{0,1})$

$H_i(X^{0,5})$

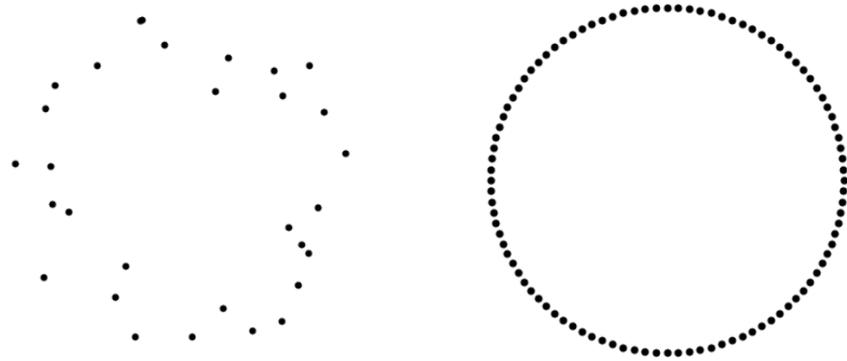
$H_i(X^{0,8})$

$H_i(Y^{0,3})$

$H_i(Y^{0,7})$

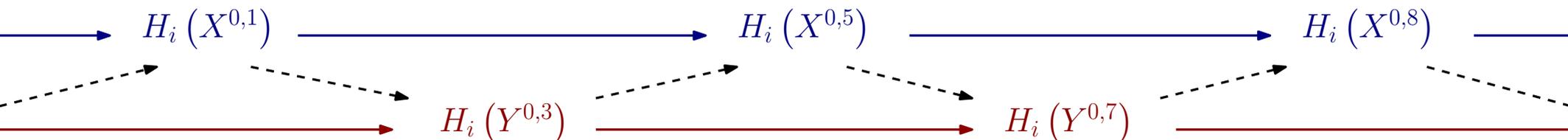
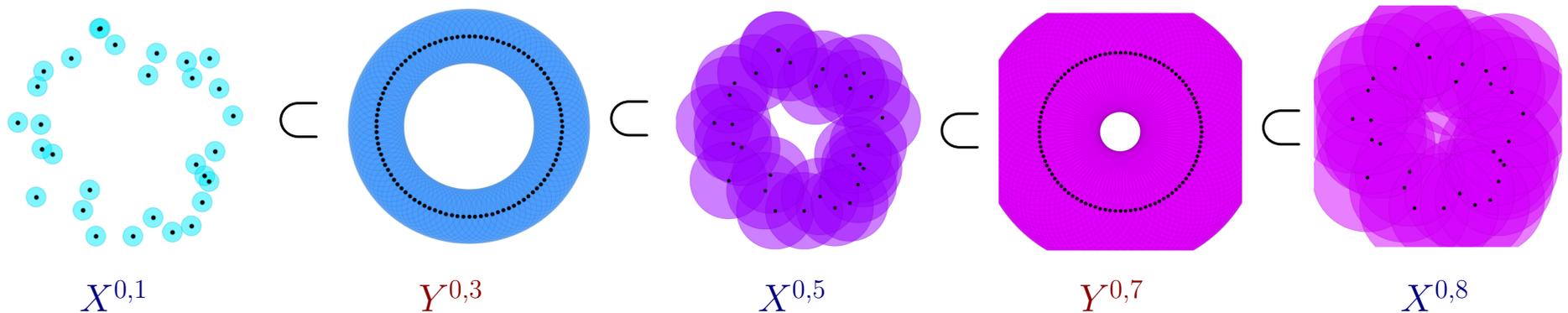
Distance d'entrelacement

Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, et ϵ leur distance de Hausdorff.



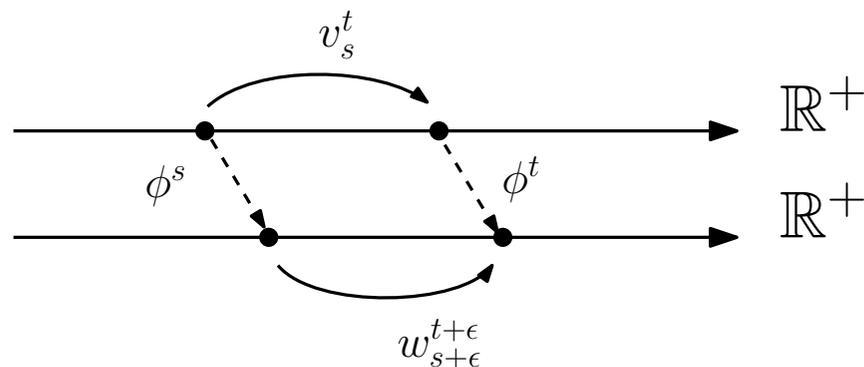
$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \begin{aligned} &\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \\ &\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|x - y\| \end{aligned} \right\}$$

Alors les modules de persistance des filtrations de Čech correspondantes sont ϵ -entrelacés.

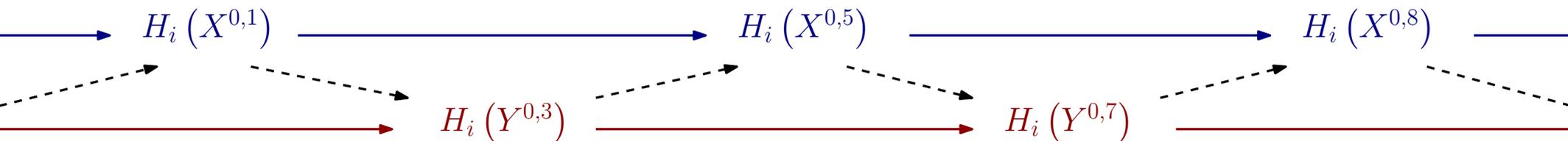
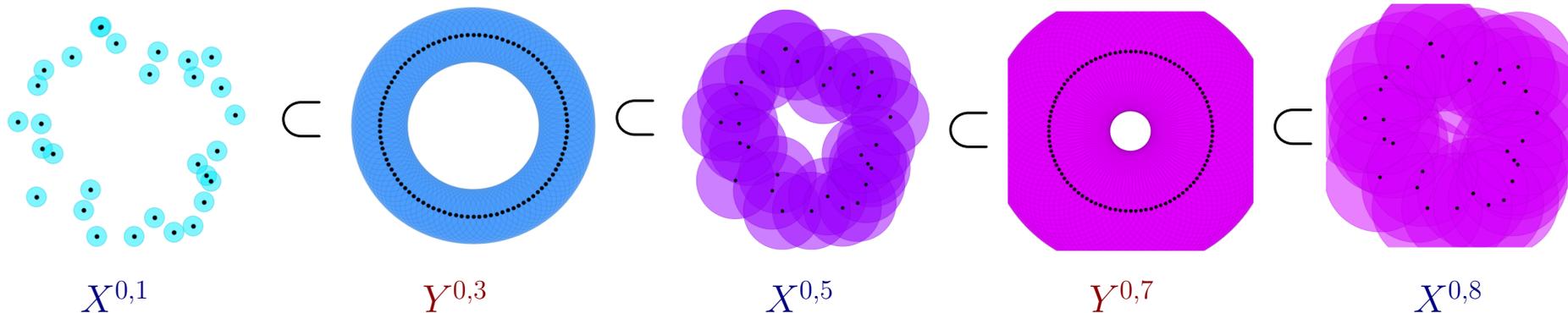
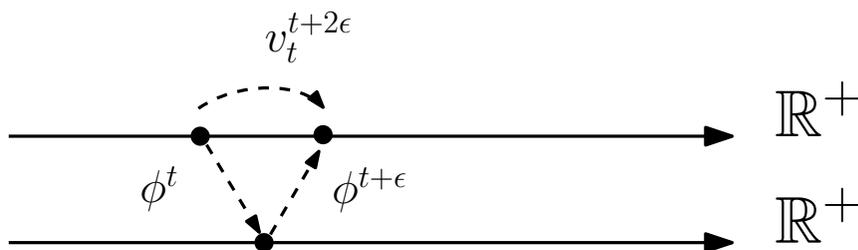


Distance d'entrelacement

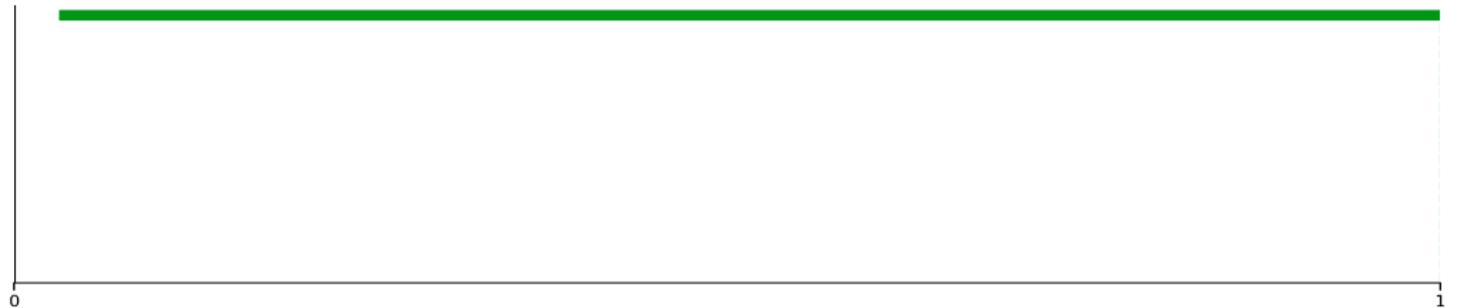
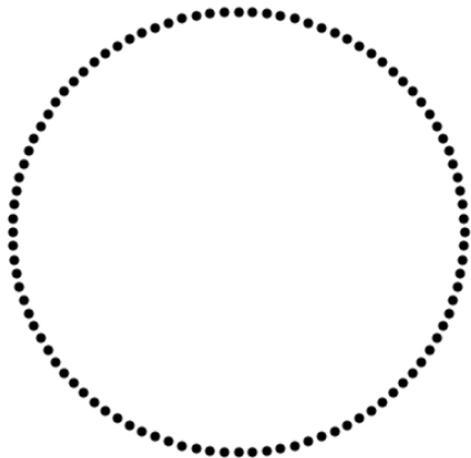
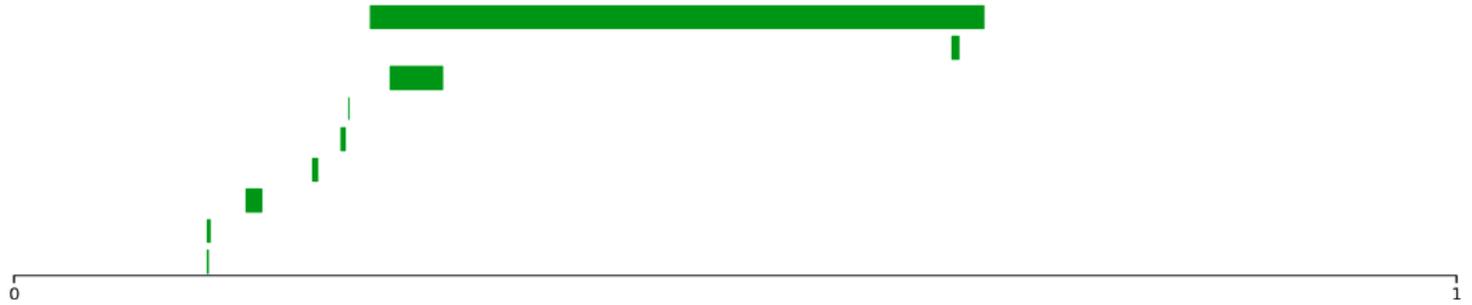
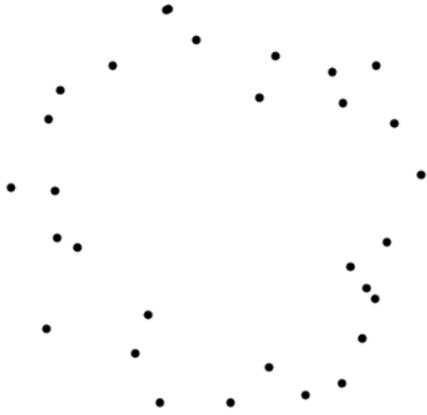
$$\begin{array}{ccc}
 V^s & \xrightarrow{v_s^t} & V^t \\
 \downarrow \phi^s & & \downarrow \phi^t \\
 W^{s+\epsilon} & \xrightarrow{w_{s+\epsilon}^{t+\epsilon}} & W^{t+\epsilon}
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc}
 V^t & \xrightarrow{v_t^{t+2\epsilon}} & V^{t+2\epsilon} \\
 \searrow \phi^t & & \nearrow \psi^{t+\epsilon} \\
 & W^{t+\epsilon} &
 \end{array}$$



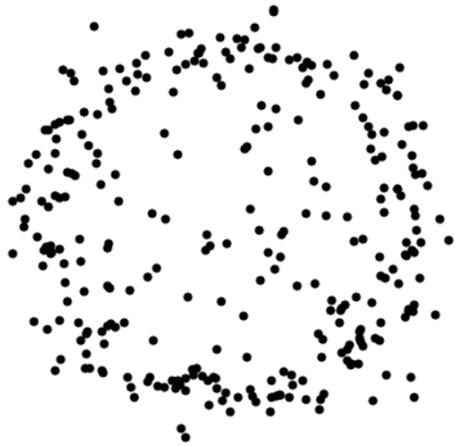
Stabilité



Pourquoi j'ai été rémunéré pendant 3 ans

DTM-filtrations

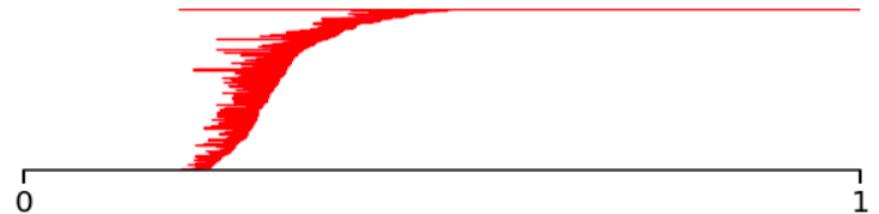
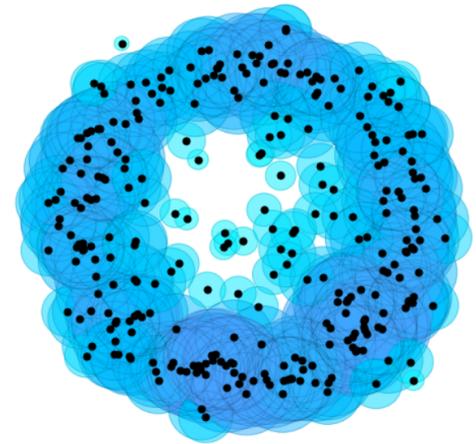
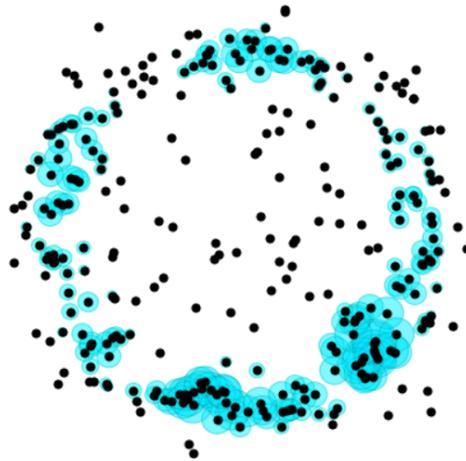
Des filtrations qui sont stables pour la distance de Wasserstein plutôt que la distance de Hausdorff.



Filtration de Čech

DTM-filtrations

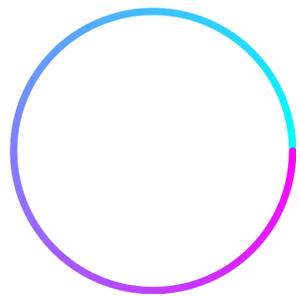
Des filtrations qui sont stables pour la distance de Wasserstein plutôt que la distance de Hausdorff.



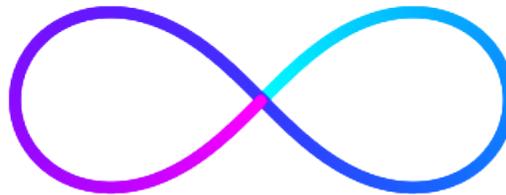
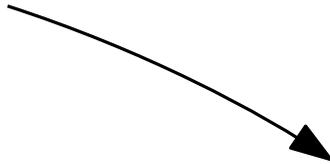
Filtration de Čech

Filtration DTM

Inférence homologique pour les variétés immergées

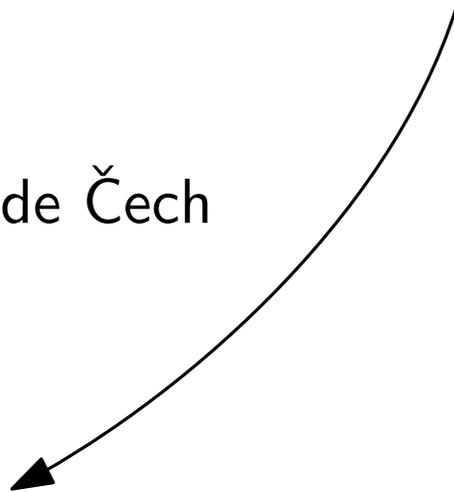


objet théorique



objet observé

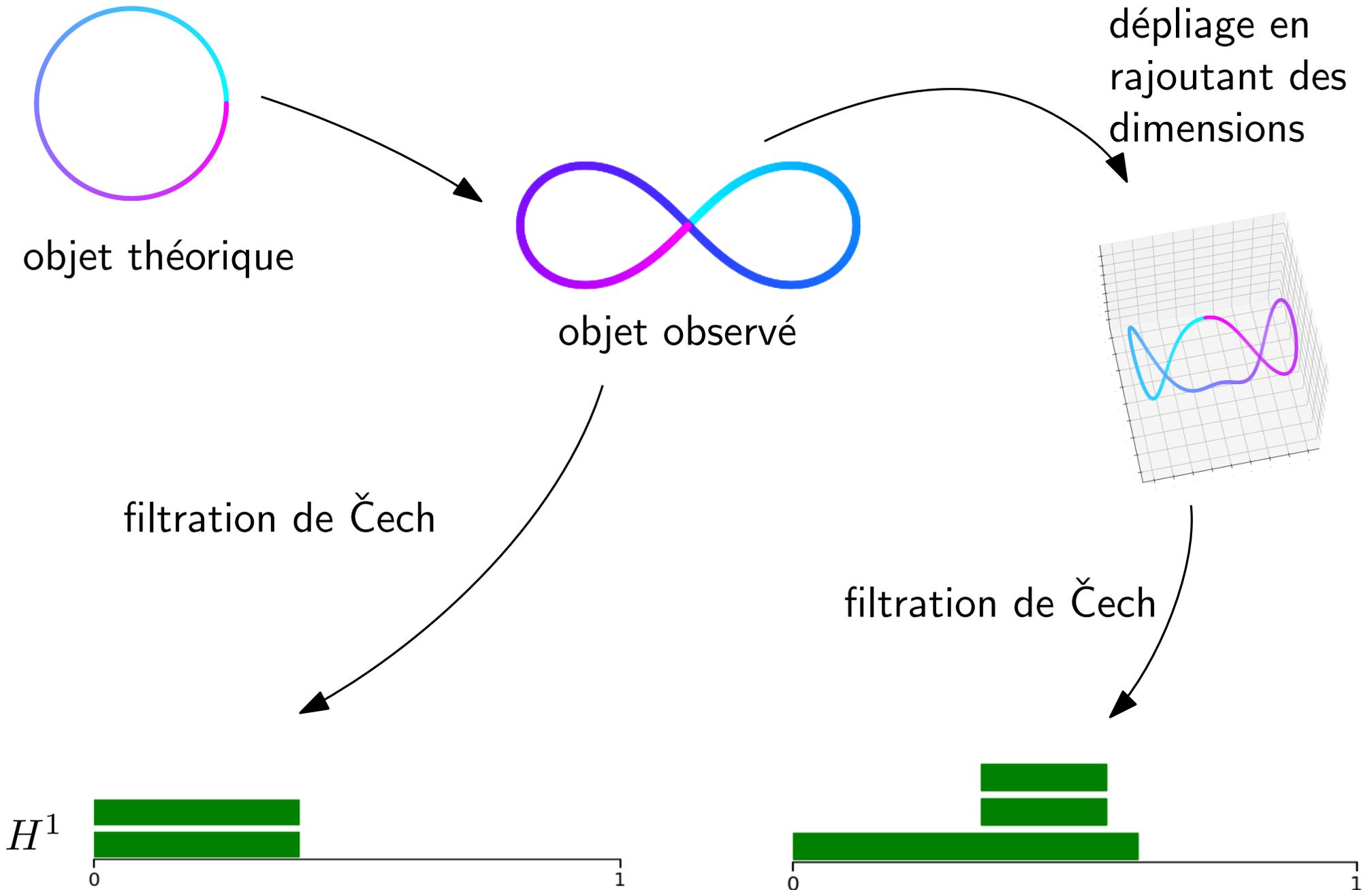
filtration de Čech



H^1



Inférence homologique pour les variétés immergées



Classes caractéristiques persistantes

