Introduction aux classes de Stiefel-Whitney

Raphaël Tinarrage
Datashape, Inria Paris-Saclay

Ces notes sont basées sur [Mil75].

1 Fibrés vectoriels : définitions

Fibrés vectoriels. Soit X un espace topologique. Un *fibré vectoriel ξ de dimension d sur X* consiste en la donnée d'un espace topologique $A = A(\xi)$, *l'espace total*, d'une application continue $\pi = \pi(\xi) : A \to X$, *l'application projection*, et pour tout $x \in X$, d'une structure d'espace vectoriel sur $\pi^{-1}(\{x\})$. De plus, ξ doit satisfaire la condition de trivialisation locale : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme $h : U \times \mathbb{R}^d \to \pi^{-1}(U)$ tel quel pour tout $y \in U$, l'application $z \mapsto h(y, z)$ définisse un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^d$ et $\pi^{-1}(\{y\})$.

$$\begin{tikzcd} A(\xi) \arrow[d, "\pi"] \\ X \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} U \times \mathbb{R}^d \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p_1"'] & \pi^{-1}(U) \arrow[d, "\pi"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Les fibres $\pi^{-1}(\{x\})$ seront notées $F_x(\xi)$.

Isomorphismes de fibrés vectoriels (avec même base). Un *isomorphisme de fibrés vectoriels* ξ, η sur X est un homéomorphisme $f : A(\xi) \to A(\eta)$ qui envoie chaque fibre $F_x(\xi)$ isomorphiquement sur $F_x(\eta)$. On obient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A(\xi) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi(\xi)"'] & & A(\eta) \arrow[dl, "\pi(\eta)"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Le fibré trivial de dimension d sur X, noté $\epsilon = \epsilon_X^d$, est défini par $A(\epsilon) = X \times \mathbb{R}^d$, avec comme projection π la projection sur la première coordonnée, et où chaque fibre est munie de la structure d'espace vectoriel usuelle de $\mathbb{R}^d$. Un fibré vectoriel ξ sur X est dit trivial si il est isomorphe à ϵ.

Sections. Une *section* d'un fibré vectoriel ξ est une application continue $s : X \to A(\xi)$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A(\xi) \arrow[d, bend left, "\pi"] \\ X \arrow[u, bend left, "s"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Un section s est *jamais nulle* si pour tout $x \in X$, $s(x)$ n'est pas nulle dans l'espace vectoriel $F_x(\xi)$. Une famille de sections $s_1, ..., s_d$ est *indépendante* si pour tout $x \in X$, les vecteurs $s_1(x), ..., s_d(x)$ sont linéairement indépendants dans $F_x(\xi)$.

Théorème 1.1. *Soit ξ un fibré vectoriel de dimension d, et $s_1, ..., s_d$ une famille de sections jamais nulles et indépendantes. Alors ξ est trivial.*

Exemples.

- Le fibré vectoriel sur le cercle $\mathbb{S}_1$ donné par un ruban de Mobius n'est pas trivial.
- Les fibrés normaux des sphères $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sont triviaux.
- Les fibrés tangents des sphères sont triviaux uniquement pour $n = 1, 3$ et 7.

Somme de Whitney. Si ξ, η sont deux fibrés vectoriels sur X, on définit leur *somme* $\xi \oplus \eta$ par

$$A(\xi \oplus \eta) = \{(x, a, b), x \in X, a \in F_x(\xi), b \in F_x(\eta)\},$$

et où l'application projection est donnée par la projection sur la première coordonnée.

Tirés en arrière. Si η est un fibré vectoriel sur Y et $g : X \to Y$ une application continue, le *tiré en arrière* $g^*\xi$ est le fibré vectoriel sur X défini par

$$A(g^*\xi) = \{(x, a), x \in X, a \in F_{g(x)}(\xi)\}$$

et la projection étant la projection sur la première coordonnée, et les structures d'espaces vectoriels étant les structures produit.

Applications de fibrés (bundle maps). Une *application de fibrés* entre deux fibrés ξ, η d'espaces de base X et Y est une fonction continue $f : A(\xi) \to A(\eta)$ qui envoie chaque fibre $F_x(\xi)$ isomorphiquement sur une autre fibre $F_{x'}(\eta)$. Il existe alors une unique application $\overline{f}$ qui fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} A(\xi) & \xrightarrow{f} & A(\eta) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi(\xi)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi(\eta)} \\ X & \xrightarrow{\overline{f}} & Y \end{array}$$

Si une telle application f existe, alors ξ est isomorphe au tiré en arrière $\overline{f}^*\eta$ ([Mil75, Lemma 3.1]). On dit que l'application $\overline{f}$ est *recouverte* par f.

2 Définition axiomatique des classes de Stiefel-Whitney

On commence traditionellement par définir les classes de Stiefel-Whitney par une liste d'axiomes, et on démontre leur existence et unicité dans un second temps.

Axiomes pour les classes de Stiefel-Whitney. A chaque fibré vectoriel ξ sur un espace paracompact X, on peut associer une suite de classes de cohomologie

$$w_i(\xi) \in H^i(X, \mathbb{Z}_2), \qquad i \in \mathbb{N},$$

appelées les classes de Stiefel-Whitney de ξ. Ces classes satisfont :

- **Axiome 1:** $w_0 = 1 \in H^0(X, \mathbb{Z}_2)$, et si ξ est de dimension d, alors $w_i(\xi) = 0$ pour $i > d$.
- **Axiome 2:** si $f : \xi \to \eta$ est une application de fibrés, alors $w_i(\xi) = \overline{f}^* w_i(\eta)$.
- **Axiome 3:** si ξ, η sont des fibrés sur le même espace X, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w_k(\xi \oplus \eta) = \sum_{i=0}^{k} w_i(\xi) \smile w_{k-i}(\eta)$, où $\smile$ représente le cup-produit.
- **Axiome 4:** si ξ est le fibré de Mobius sur le cercle, alors $w_1(\xi) \neq 0$.

En définissant la classe de Stiefel-Whitney totale $w(\xi) = w_0(\xi) + ... + w_d(\xi)$, le troisième axiome se réécrit $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \smile w(\eta)$.

Conséquences directes.

Proposition 2.1. *Deux fibrés isomorphes admettent les mêmes classes de Stiefel-Whitney.*

Proposition 2.2. *Si ξ est trivial, alors $w_i(\xi) = 0$ pour tout $i > 0$.*

Proposition 2.3. *Si $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, τ son fibré tangent et ν sont fibré normal, alors la classe de Stifel-Whitney totale $w(\tau)$ est l'inverse de $w(\nu)$ dans l'algèbre $H^*(\mathcal{M}, \mathbb{Z}_2)$.*

Proposition 2.4. *Si ξ admet k sections non-nulles et indépendantes, alors $w_d(\xi) = ... = w_{d-k+1}(\xi) = 0$.*

Exemples.

- Si ξ est le fibré de Mobius sur $\mathbb{S}_1$, alors $H^*(\mathbb{S}_1) = \mathbb{Z}_2[a]/a^2$, et $w(\xi) = 1 + a$.
- Si τ est le fibré tangent du tore, alors $w(\tau) = 1$.
- Si τ est le fibré tangent de la sphère $\mathbb{S}_2$, alors $w(\tau) = 1$.
- Si ξ est le fibré tangent de l'espace projectif $\mathbb{P}_d$, alors $H^*(\mathbb{P}_d) = \mathbb{Z}_2[a]/a^{d+1}$, et $w(\xi) = (1 + a)^{d+1}$.

Conséquences moins directes.

Théorème 2.5. *Une variété lisse $\mathcal{M}$ est orientable si et seulement si son fibré tangent τ satisfait $w_1(\tau) = 0$.*

Théorème 2.6. *Si deux variétés lisses sont cobordantes, alors elles admettes les mêmes nombres de Stiefel-Whitney.*

Exemples d'application. On peut par exemple utiliser les classes de Stiefel-Whitney pour étudier :

- l'immersibilité des variétés dans l'espace euclidien,
- la parallélisabilité des variétés lisses.

3 Retour sur les fibrés vectoriels

Grassmaniennes. Soit $0 < d \leq n$. La grassmanienne $\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^n)$, en tant qu'ensemble, consiste en les d-sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Elle est munie d'une topologie en quotientant la variété de Stiefel associée.

On peut aussi définir la grassmanienne infinie $\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty)$ comme étant l'ensemble des d-sous-espaces de $\mathbb{R}^\infty$ (l'espace des suites réelles presque partout nulles). Elle est topologisée comme la limite directe de la suite

$$\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{G}_d(\mathbb{R}^{d+1}) \subset \mathcal{G}_d(\mathbb{R}^{d+2}) \subset \cdots .$$

Quand $d = 1$, $\mathcal{G}_1(\mathbb{R}^n)$ est notée $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et s'appelle l'espace projectif.

Fibrés universels. Il existe sur $\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^n)$ un fibré vectoriel canonique de dimension d, noté γ_d^n. Il consiste en l'espace total

$$A(\gamma_d^n) = \{(V, v), V \in \mathcal{G}_d(\mathbb{R}^n), v \in V\} \subset \mathcal{G}_d(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

avec l'application projection sur la première coordonnée, et la structure vectorielle héritée de $\mathbb{R}^n$. Ce fibré est appelé universel, pour la raison suivante :

Lemme 3.1 ([Mil75, Lemma 5.3])**.** *Soit ξ un fibré vectoriel de dimension d sur un espace compact X. Alors pour n assez large, il existe une application de fibrés $\xi \to \gamma_d^n$.*

Si une telle application de fibrés est notée f, et si $\overline{f}$ représente l'application qu'elle recouvre, alors on en déduit que $\xi \simeq \overline{f}^* \gamma_d^n$.

Avec la grassmanienne infinie, on obtient un résultat plus simple à utiliser

Lemme 3.2 ([Mil75, Lemma 5.6])**.** *Soit ξ un fibré vectoriel de dimension d sur un espace paracompact X. Alors il existe une application de fibrés $\xi \to \gamma_d^\infty$.*

Une telle application est appelée une application classifiante.

Une correspondance. Soient ξ, η des fibrés sur X, et soient f_ξ, f_η des applications classifiantes. Si f_ξ et f_η sont homotopes, on montre facilement que les fibrés sont isomorphes. La réciproque est vraie :

Théorème 3.3 ([Mil75, Corollary 5.10])**.** *Soit X un espace paracompact. Il existe une correspondance entre les fibrés vectoriels de dimension d sur X (à isomorphisme près) et les applications continues $X \to \mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty)$ (à homotopie près). Cette correspondance est donnée par $\xi \mapsto \overline{f}_\xi$, où f_ξ représente une application classifiante de ξ.*

4 Construction des classes de Stiefel-Whitney

Un principe général. Le théorème précédent donne un cadre général pour définir des classes caractéristiques. Soit Λ un groupe, et $c \in H^i(\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty), \Lambda)$ une classe quelconque. A chaque fibré vectoriel ξ on peut associer la classe

$$c(\xi) = \overline{f}_\xi^*(c) \in H^i(X, \Lambda).$$

Cette classe est bien définie car f_ξ est définie à homotopie près. Un cas particulier de cette construction sont les classes de Stiefel-Whitney.

L'anneau de cohomologie $H^*(\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)$.

Théorème 4.1 ([Mil75], Theorem 7.1)**.** *Il existe $w_1, ..., w_d \in H^*(\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2)$ de degrés $|w_1| = 1, ..., |w_d| = d$, telles que*

$$H^*(\mathcal{G}_d(\mathbb{R}^\infty), \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2[w_1, ..., w_d].$$

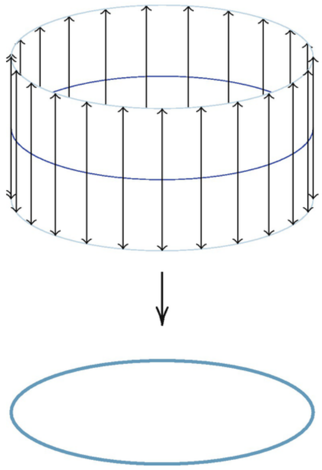
De plus, il n'existe pas de relation polynomiale entre les $w_1, ..., w_d$.

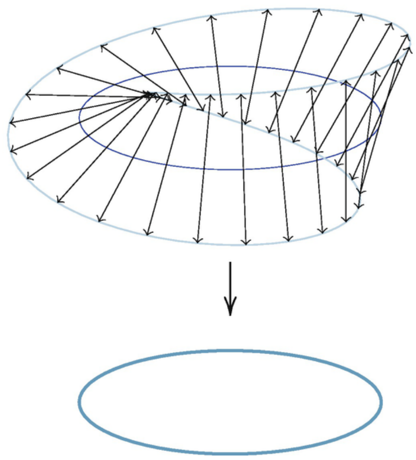
En particulier, la cohomologie de l'espace projectif infini est $H^*(\mathbb{P}_\infty(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[w_1]$.

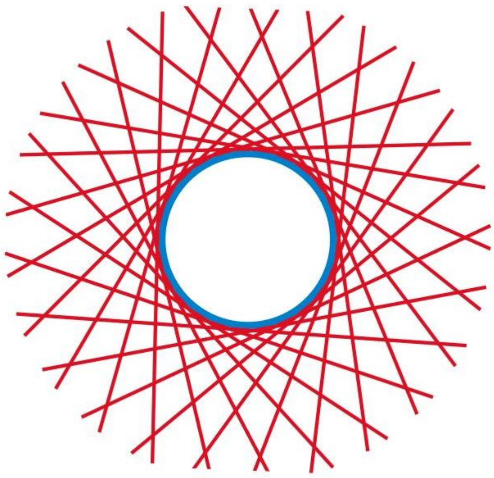
Définition. Pour tout fibré vectoriel, définissons $w_i(\xi) = f_\xi^* w_i$, où f_ξ est une application classifiante pour $\xi \to \gamma_d^\infty$.

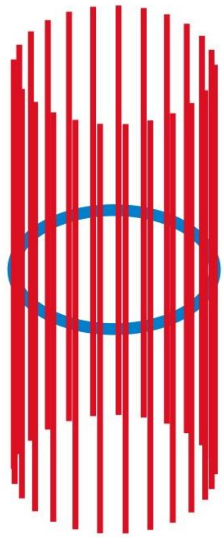
Théorème 4.2. *Définies de cette façon, ces classes caractéristiques satisfont aux axiomes des classes de Stiefel-Whitney. De plus, elles sont uniques.*

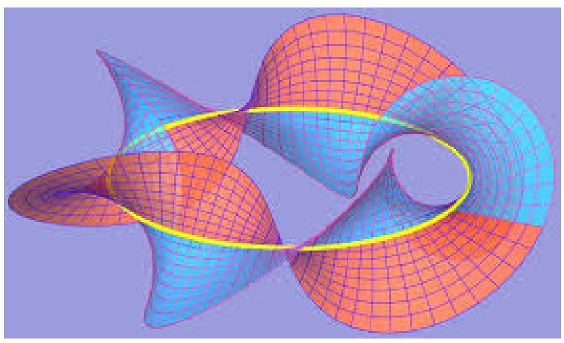
5 Images

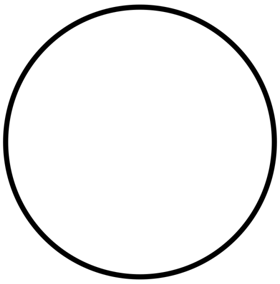


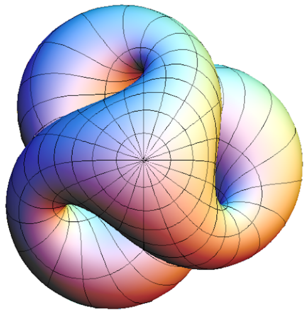


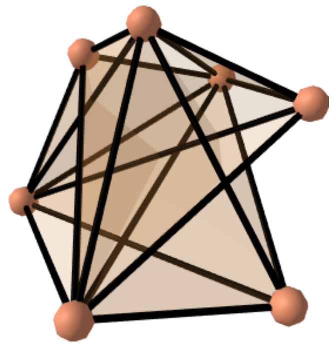


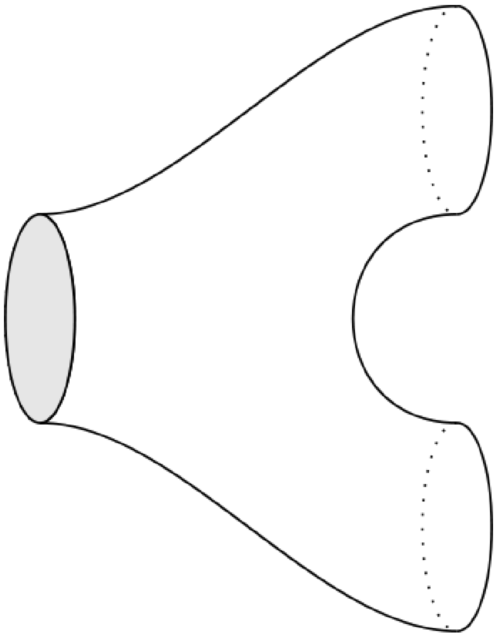


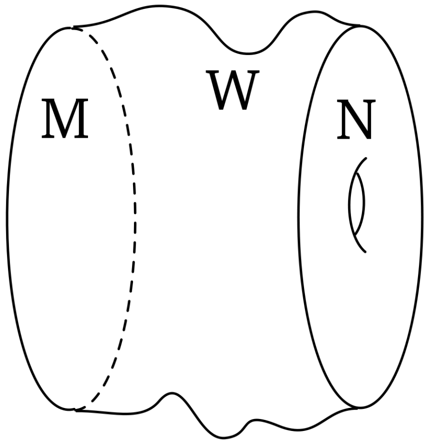


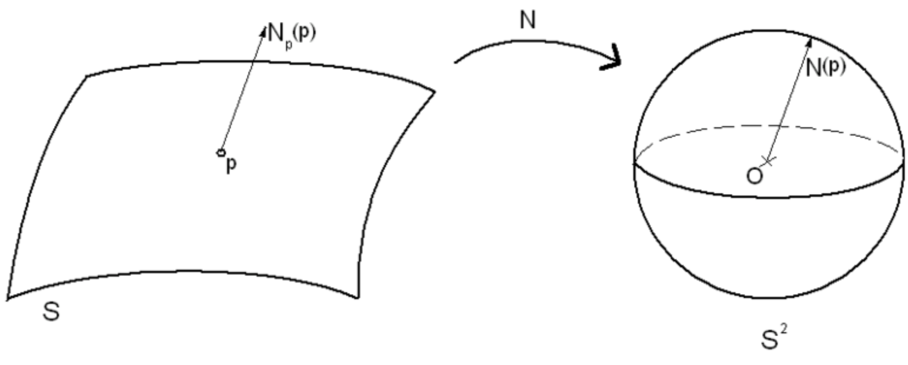












References

[Mil75] John W. Milnor. *Characteristic Classes*. 1975.