Sujets MATh.en.JEANS

Florence Ferry
Claudie Missenard
Raphaël Tinarrage

Collège Alain Fourier,
Orsay

Année 2018-2019

1 Colliers et coloriages

On se donne trois perles vertes et trois perles bleues. Combien de colliers peut-on constituer avec ces six perles ? On a le droit de faire tourner les colliers sur eux-mêmes.
Et si on prend quatre perles vertes et quatre perles bleues ? Et trois vertes, trois bleues, trois jaunes ?

Pour aller plus loin : On se donne trois faces vertes et trois faces bleues. Combien de cubes peut-on constituer ?

2 Balade en chameau

Nous sommes au centre d'un désert, décrit par un carré recollé sur les bords. Le déplacement sur le carré recollé s'effectue de la façon suivante : quand on traverse un côté, on réapparait au même endroit sur le côté opposé.

Le carré fait 10km de côté. Le centre est une oasis. Nous choisissons une direction et lançons notre chameau en ligne droite dans cette direction. A quelle condition le chameau va revenir à l'oasis ? Et en combien de temps (il se déplace à 3 km/h) ?

Pour aller plus loin : mêmes questions avec un désert en forme d'octogone régulier recollé.

3 Rapports harmonieux

Considérons une note de base, par exemple le La, qui correspond à une onde de fréquence 440Hz (Hertz). Cela signifie que lorsque l'on joue un La sur un instrument, l'onde sonore effectue 440 oscillations par seconde.

Toutes les autres notes sont aussi caractérisées par leur fréquence. En multipliant ou divisant la fréquence par deux, on obtient la même note (plus grave ou plus aiguë). Voici une liste des notes et quelques-unes de leurs fréquences représentatives en Hz (cet accordage s'appelle la *gamme tempérée*)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
do	32.703	65.406	130.81	261.63	523.25	1046.5	2093.	4186.	8372.	16744.
do#	34.648	69.296	138.59	277.18	554.37	1108.7	2217.5	4434.9	8869.8	17740.
ré	36.708	73.416	146.83	293.66	587.33	1174.7	2349.3	4698.6	9397.3	18795.
ré#	38.891	77.782	155.56	311.13	622.25	1244.5	2489.	4978.	9956.1	19912.
mi	41.203	82.407	164.81	329.63	659.26	1318.5	2637.	5274.	10548.	21096.
fa	43.654	87.307	174.61	349.23	698.46	1396.9	2793.8	5587.7	11175.	22351.
fa#	46.249	92.499	185.	369.99	739.99	1480.	2960.	5919.9	11840.	23680.
sol	48.999	97.999	196.	392.	783.99	1568.	3136.	6271.9	12544.	25088.
sol#	51.913	103.83	207.65	415.3	830.61	1661.2	3322.4	6644.9	13290.	26580.
la	55.	110.	220.	440.	880.	1760.	3520.	7040.	14080.	28160.
la#	58.27	116.54	233.08	466.16	932.33	1864.7	3729.3	7458.6	14917.	29834.
si	61.735	123.47	246.94	493.88	987.77	1975.5	3951.1	7902.1	15804.	31609.

Il existe un autre système pour repérer les notes, l'*échelle musicale*. Il faut se fixer une note de référence (appelée tonique). Alors toutes les autres notes se repèrent par rapport à celle-ci grâce aux intervalles.

Intervalle	**Rapport de fréquences** $= \dfrac{\text{fréquence de la note supérieure}}{\text{fréquence de la tonique}}$
Unisson	1
Seconde mineure	16/15
Seconde majeure	9/8
Tierce majeure	6/5
Tierce mineure	5/4
Quarte juste	4/3
Quarte augmentée	45/32
Quinte	3/2
Sixte mineure	8/5
Sixte majeure	5/3
Septième mineure	9/5
Septième majeure	15/8
Octave	2

Par exemple, la quinte du La est le Mi, et $\dfrac{\text{fréquence du Mi}}{\text{fréquence du La}} = \dfrac{659.26}{440} \approx \dfrac{3}{2}$

On dit souvent qu'un accord de deux notes est harmonieux si le rapport de leur fréquence est un nombre rationnel tel que sa forme réduite ait un petit numérateur et un petit dénominateur. On dira aussi qu'on accord de plusieurs notes est harmonieux si chacune des notes prises deux à deux sont harmonieuses.

Quels sont les accords à trois notes les plus harmonieux ? Et à quatre notes ?

4 Formule d'Euler

Un graphe planaire est obtenu de la façon suivante : on choisit des points du plan, que l'on appelle les sommets. On peut ensuite choisir de les relier des points distincts par des segments, appelés arêtes, telles qu'elles ne s'intersectent pas.

On appelle face du graphe une région du plan entourée par des segments. Que dire de la quantité suivante :

nombre de faces - nombre d'arêtes + nombre de sommets = ?

Pour aller plus loin : même question pour des graphes que l'on dessine sur la sphère.
Pour aller encore plus loin : même question pour des graphes que l'on dessine sur le tore.

5 Tetris tridimensionnel

On se donne quatre carrés (dans le plan). On appelle pièce de Tetris un assemblage de ces quatre carrés tels qu'ils soient collés bord à bord. Combien de pièces de Tetris peut-on former ? On a le droit de faire tourner les pièces sur elles-mêmes.

Ensuite, on se donne quatre cubes. Combien de pièces de Tetris tridimensionnelles peut-on former ? Et à cinq cubes ?

6 Algorithme de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar est un processus qui transforme un nombre entier en un autre. Il fonctionne de la façon suivante : soit n un nombre entier. Soit n' le nombre obtenu en rangeant les chiffres de n dans l'ordre décroissant, et n'' le nombre obtenu en les rangeant dans l'ordre croissant. L'algorithme de Kaprekar rend alors le nombre $n' - n''$.

Étant donné un nombre de départ, on répète l'algorithme de Kaprekar sur les nombres obtenus. Si l'on part d'un nombre à deux chiffres, qu'observe-t-on ? Et à trois chiffres ? Et à quatre ?

7 Dominos anthragoniens

Les règles du jeu de dominos anthragoniens sont très simples. Dans un jeu complet, il n'y a que quatre dominos, de valeur un, deux, trois ou quatre. Un côté de chaque domino est blanc, l'autre noir. A partir d'un arrangement initial proposé par un joueur, son adversaire doit mettre, en moins de 13 coups, les quatres dominos dans l'ordre, et avec leur face blanche visible. A chaque coup, on doit :

- permuter deux dominos adjacents
- et, en même temps, retourner un de ces dominos.

Si l'on y parvient pas en moins de treize coups, on a perdu.

Proposez une solution à partir de cet arrangement initial :

4 noir - 3 blanc - 2 noir - 1 blanc

Et à partir de celui-ci :

3 blanc - 2 blanc - 1 blanc - 4 blanc

Plus généralement, quels sont les arrangements initiaux qui permettent de gagner ?

8 Multiplier des points

Les points du plan euclidien sont identifiés par leurs coordonnées cartésiennes (x, y). On dispose d'une définition de l'addition : $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
Peut-on peut définir sur ces points une loi multiplicative ?

Définir une loi multiplicative, c'est définir une multiplication $(x, y) \times (x', y') = (?, ?)$ pour tous les couples de points, et telles que cette loi vérifie les mêmes propriétés que la multiplication des nombres réels :

- commutativité : $(x, y) \times (x', y') = (x', y') \times (x, y)$
- associativité : $((x, y) \times (x', y')) \times (x'', y'') = (x, y) \times ((x', y') \times (x'', y'')$
- distributivité : $((x, y) + (x', y')) \times (x'', y'') = (x, y) \times (x', y') + (x, y) \times (x'', y'')$
- élément neutre : pour tout point (x, y), on a $(x, y) \times (1, 0) = (x, y)$
- existence d'un inverse : pour tout point (x, y) qui n'est pas $(0, 0)$, il existe un autre point (x', y') tel que $(x, y) \times (x', y') = (1, 0)$.

Pour aller plus loin : Peut-on multiplier des points dans l'espace ?

9 Billes

On dispose de 6 billes numérotées de 1 à 6 rangées en ligne. Au premier tour, on barre une bille sur deux en partant de la première ; puis à chaque tour, on barre une bille sur deux parmi celles restantes. Quelle est le numéro de la dernière bille non barrée ?

On répète la même expérience pour 1352 billes au départ. Quelle est la dernière bille non barrée ? Et plus généralement, pour un nombre quelconque de billes ?
Pour aller plus loin : Que se passe-t-il si l'on choisit de ne barrer qu'une bille sur trois ?