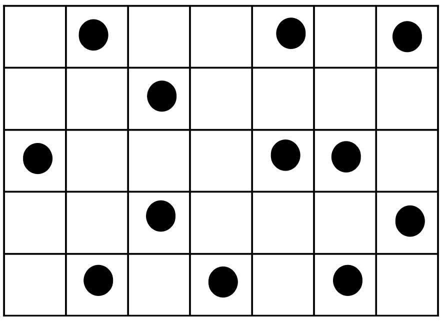
Gare aux tricheurs !

Année 2017 - 2018

Élèves de 4ème : Inès Déso, Maxime Jaconelli, Inès Nimier et Amélia Pham.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignants : Florence FERRY et Claudie ASSELAIN.
Chercheur : Raphaël Tinarrage, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay.

Le sujet : A l'université d'O., pendant les examens, les tables sont placées régulièrement, et les surveillants s'asseyent à certaines des tables, comme ci-dessous.

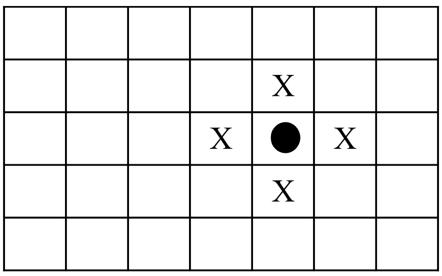


N'ayant pas révisé, les étudiants essayent tous de tricher. Chaque surveillant ne pouvant contrôler que les 4 étudiants qui l'entourent, combien faut-il au minimum de surveillants ?

Résultats : Nous avons réussi à trouver le minimum de surveillants nécessaires pour de petites salles « carrées », jusqu'à 5 tables sur un côté, et pour les autres, nous avons formulé un encadrement. Nous avons aussi décrit une technique pour placer les surveillants en nombre réduit même si ce n'est pas le minimum.

I – Introduction

Un surveillant peut surveiller au maximum les 4 étudiants qui l'entourent ; nous représentons ici ces étudiants par des croix.



Etudions l'exemple donné dans le sujet. Nous plaçons des croix autour de chaque surveillant pour voir si tous les étudiants sont surveillés.

X	●	X	X	●	X	●
X	X	●	X	X	X	X
●	X	X	X	●	●	X
X	X	●	X	X	X	●
X	●	X	●	X	●	X

Tous les étudiants sont bien surveillés.
Mais pourrait-on utiliser moins de surveillants ?

Avant d'étudier toutes sortes de salles, nous allons d'abord nous intéresser aux salles dites « carrées », c'est à dire que les tables sont placées pour avoir autant de lignes que de colonnes.

On appellera « salle $n \times n$ » une salle avec n rangées de n tables et nous noterons S une place occupée par un surveillant et E une place occupée par un étudiant.

II – Les salles d'examens carrées

1) Salles 2×2

S	

On place un premier surveillant dans un coin.

S	E
E	

Il surveille 2 étudiants.

S	E
E	S

Il nous faut un minimum de 2 surveillants.

2) Salles 3×3

Nous allons démontrer qu'il faut 3 surveillants au minimum.
Pour placer le premier surveillant, nous avons 3 possibilités.

Cas 1

	S	

Cas 2

		S

Cas 3

	S	

On trouve alors les places qu'ils surveillent.

Cas 1

	E	
E	S	E
	E	

On doit rajouter 4 surveillants.

Cas 2

	E	S
		E

Il reste 6 tables, or un surveillant ne peut surveiller que 4 étudiants au maximum donc il faut rajouter au minimum 2 surveillants.

Cas 3

E	S	E
	E	

Il reste 5 cases ; un surveillant pourrait suffire, mais en essayant de placer un seul surveillant supplémentaire, 2 étudiants ne sont alors pas surveillés. Nous en plaçons donc 2.

Cas 1

S	E	S
E	S	E
S	E	S

Il faut 5 surveillants au total pour ce cas.

Cas 2

E	E	S
S	E	E
E	S	E

Voici une solution avec 3 surveillants.

Cas 3

E	S	E
E	E	E
S	E	S

Voici une solution avec 3 surveillants.

Nous avons donc trouvé le minimum de surveillants nécessaires pour les salles 3×3, il est de 3, et plusieurs dispositions sont possibles.
On peut remarquer que la case du milieu n'est pas une place qui optimise le nombre de surveillants.
On peut également remarquer que dans les deux solutions trouvées, on peut trouver un axe de symétrie.

E	E	S
S	E	E
E	S	E

E	S	E
E	E	E
S	E	S

3) Salles 4×4

Il y a 16 tables au total ; si on met 3 surveillants, il restera 13 tables à surveiller. Chaque surveillant surveille au maximum 4 étudiants donc les 3 surveillants surveilleront 12 étudiants maximum.
Si on compte le nombre de tables alors occupées par les étudiants et les surveillants : 3 + 12 = 15. Un étudiant n'est pas surveillé. Donc il faut minimum 4 surveillants. Nous avons trouvé une solution avec 4 surveillants et, avec le raisonnement précédent, on est sûr que c'est le minimum.

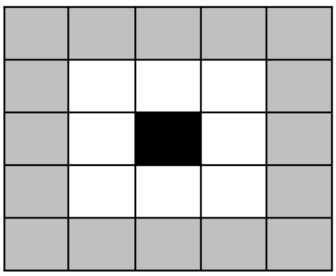
E	E	S	E
S	E	E	E
E	E	E	S
E	S	E	E

Cette solution est la seule solution que nous ayons trouvée avec 4 surveillants (1). Elle comporte une symétrie, mais cette fois-ci centrale.

4) Salles 5×5

Il y a 25 tables au total ; si on met 5 surveillants, ils surveilleront 20 étudiants maximum, ce qui nous fait les 25 tables occupées par les étudiants et les surveillants. On ne peut donc pas enlever un surveillant, 5 est un minimum éventuel en dessous duquel on ne pourra pas descendre.
Nous allons expliquer pourquoi le minimum est de 7 surveillants. Tout d'abord, nous partageons notre salle en trois zones :

- une zone grise : les bords
- une zone noire : la table au centre
- une zone blanche, le reste.



Notons N le nombre minimum de surveillants qu'il faut ; nous allons expliquer pourquoi : $N \geq 7$.
La zone grise comporte 16 tables, qui ne peuvent être surveillées que par 1 surveillant assis en zone blanche ou en zone grise.
On note « b » le nombre de surveillants en zone blanche et « g » celui en zone grise.
Les coins de la zone grise sont forcément surveillés par un surveillant assis en zone grise donc : $g \geq 4$.
Chaque surveillant en zone grise « occupe » avec les étudiants qu'il surveille, 3 tables grises au maximum.
Un surveillant en zone blanche ne peut pas être assis au coin de la zone (sinon il laisse le coin gris sans surveillance : gâchis (2)) et donc surveille au plus une table en zone grise donc :
$3g + b \geq 16$ avec $g + b$ qui est le plus petit possible.

Étudions les différents cas :

- Soit $b = 0$ et $g = 6$: la case du centre n'est pas surveillée donc il faut un surveillant supplémentaire. Donc : $N \geq 7$.
- Soit $b = 1$ et $g = 5$: sur les 9 cases qui ne sont pas grises 5 au maximum seront surveillées par g et 3 par b. Une case ne sera donc pas surveillée il faut donc un surveillant supplémentaire : $N \geq 7$.
- Soit $b = 2$ et $g = 5$ et donc $b + g = 7$ donc : $N \geq 7$.
- Soit $b = 3$ et $g = 4$: $b + g = 7$ ou 8 donc : $N \geq 7$.

Finalement on a toujours : $N \geq 7$.
Comme nous avons trouvé une solution avec 7 surveillants, on sait que ce sera le minimum.
Voici 2 solutions :

E	S	E	E	S
E	E	E	E	E
S	E	S	S	E
E	E	E	E	E
E	S	E	E	S

Un axe de symétrie horizontal.

S	E	E	S	E
E	E	S	E	E
E	E	E	E	S
S	S	E	E	E
E	E	E	S	E

Pas d'élément de symétrie dans cette configuration.

5) Salles 6×6
Il y a 36 tables. Si on met 7 surveillants, ils surveilleront 28 étudiants maximum, ce qui nous fait 35 tables occupées par les étudiants et les surveillants. C'est insuffisant, un étudiant ne sera pas surveillé. 8 surveillants serait donc un minimum. Nous avons trouvé une configuration avec 10 surveillants mais nous n'avons pas réussi à en utiliser moins.
Voici notre exemple avec encore un axe de symétrie (horizontal) :

E	E	S	E	E	E
S	E	E	E	S	S
E	E	S	E	E	E
E	E	S	E	E	E
S	E	E	E	S	S
E	E	S	E	E	E

Tableau récapitulatif de nos recherches

Salles $n \times n$	Par le calcul, le nombre de surveillants est supérieur ou égal à	Minimum trouvé	Symétrie trouvée
1	1	1	Oui
2	1	2	Oui
3	2	3	Oui
4	4	4	Oui
5	5	7	Oui
6	8	10	Oui
7	10	12	Oui
8	13	16	Oui

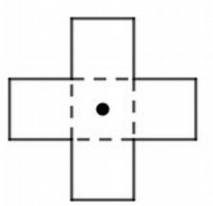
Remarques :
- Nous n'avons pas réussi à trouver une formule qui nous donnerait le nombre de surveillants cherché.
- Nous n'avons pas n'ont plus pu utiliser une symétrie visible pour placer les surveillants au mieux.
- Au delà du 8×8 , cela devient compliqué, vu le nombre de possibilités que l'on a de placer les surveillants. Mais nous verrons tout de même plus loin, une technique pour essayer de placer les surveillants en minimisant leur nombre.

On peut tout de même trouver une formule permettant de dire que N (le nombre de surveillants cherché) sera plus grand qu'un certain nombre qui dépend du nombre de tables.
On a une salle de $n \times n = n^2$ tables. Chaque surveillant avec les étudiants qu'il surveille « occupe » 5 tables maximum. C'est-à-dire : $N \times 5 \geq n^2$. On a donc : $N \geq \frac{n^2}{5}$.

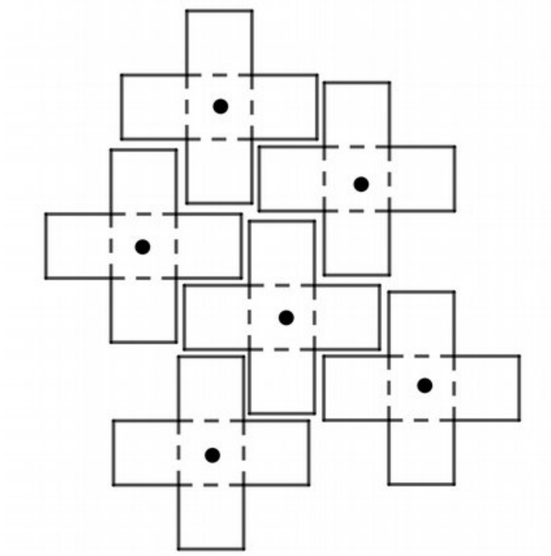
Par exemple, pour n = 9, la salle a 81 tables : $N \geq \frac{9^2}{5}$ donc $N \geq 17$. Il nous faudra au moins 17 surveillants et 17 n'est peut-être pas le minimum.

III – Les pavages

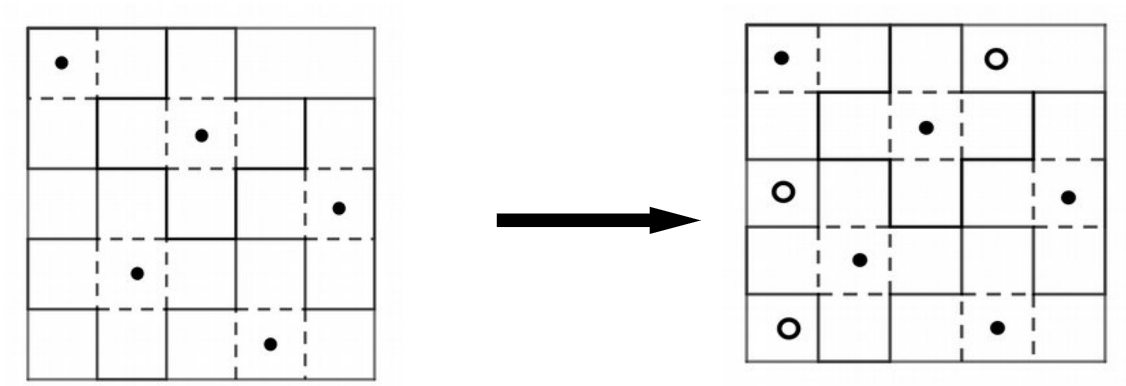
Pour optimiser le placement des surveillants on va d'abord remplir les tables qui ne sont pas sur les bords puis on complètera ensuite avec les surveillants manquants sur les bords. Cette façon de faire nous permettra de trouver cette fois-ci un maximum de surveillants nécessaires et on aura alors avec la précédente formule un encadrement du nombre de surveillants minimum cherché.
On pourra aussi remplir des salles rectangulaires avec cette méthode.
Pour commencer à remplir le milieu de la salle, on utilise un pavage qui a pour figure de base le surveillant et ses 4 étudiants :



Un surveillant surveille le maximum d'étudiants possible. On va associer plusieurs de ces morceaux ensemble : les surveillants ne surveilleront jamais le même étudiant et les étudiants seront tous surveillés si on ne s'occupe pas des bords.



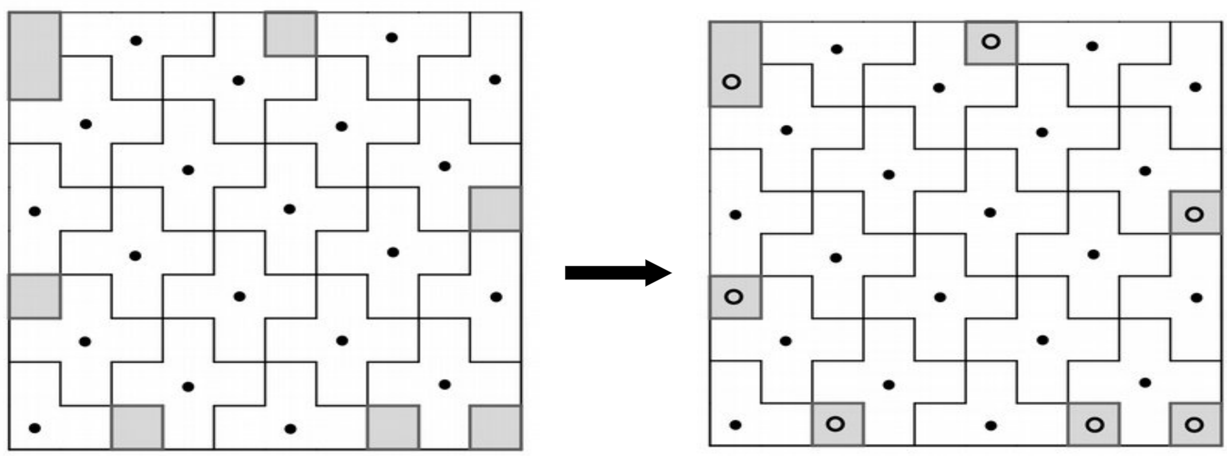
Si on applique cette méthode pour la salle 5×5 :



Après voir placé les blocs, il faut encore ajouter 3 surveillants.

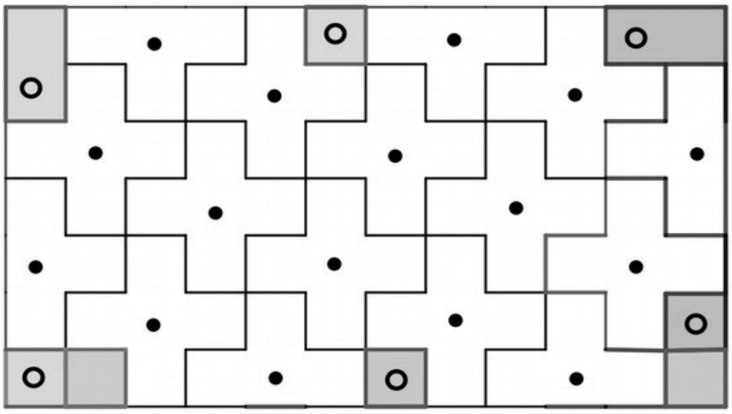
Ce qui nous fait 8 surveillants.

Nous avions trouvé un minimum de 7 surveillants auparavant, ce qui nous confirme que cette méthode de pavage ne nous donne pas le minimum cherché ; on est néanmoins proche de la solution optimale et le remplissage est très rapide.
Voici pour une salle 10×10 :



On doit ajouter 7 surveillants sur les bords. Ce qui nous en fait 27 au total. Sachant que le minimum sera au dessus de 20 (100/5), N est compris entre 20 et 27.

Encore un exemple avec une salle rectangulaire 7×12



On doit ajouter 6 surveillants sur les bords. Ce qui nous en fait 22 au total. Sachant que le minimum sera au dessus de $\frac{7 \times 12}{5}$, N est compris entre 17 et 22.

On veut trouver M tel que N soit inférieur à M dans une salle de $n \times m$ tables. Le nombre de surveillants placés par le pavage est au plus : $\frac{n \times m}{5}$ (3). On ajoute ensuite ceux sur le bord.

Le nombre de tables sur le bord est $2n + 2m - 4$; pour être sûr de tout surveiller, on met un surveillant toutes les trois tables.

On a donc : M = $\frac{2n+2m-4}{3}+\frac{n \times m}{5}$

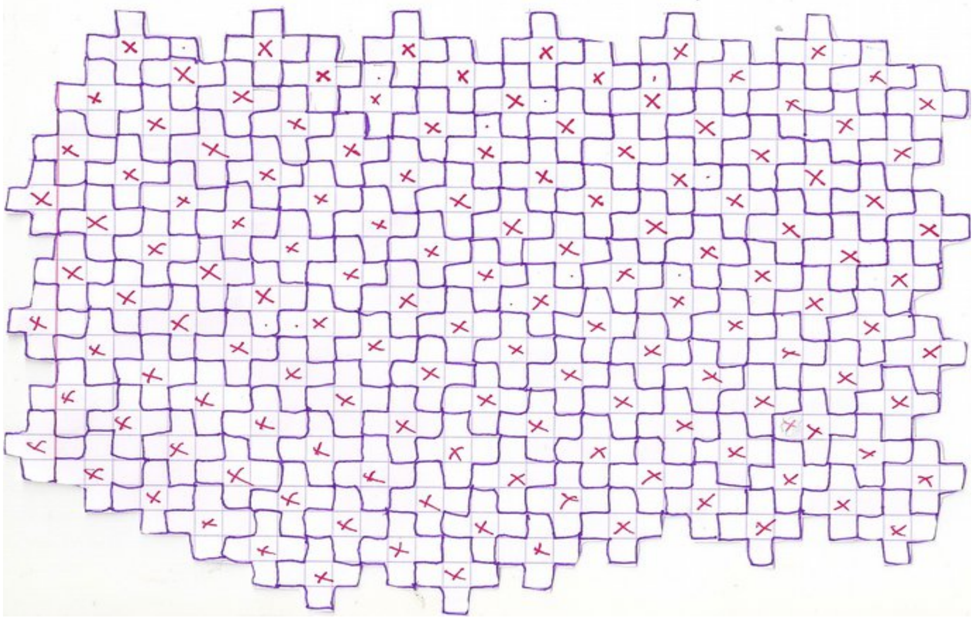
Voilà donc un encadrement du nombre minimum N de surveillants nécessaires :

$$\boxed{\frac{2n+2m-4}{3}+\frac{n \times m}{5} \geq N \geq \frac{n \times m}{5}}$$

Conclusion :

Les responsables de l'université devraient faire des salles d'examen avec les murs en zig-zag pour éviter d'embaucher trop de surveillants !

Voici un exemple de salle :



Notes d'édition.

(1) On peut montrer que cette solution est la seule avec 4 surveillants (à symétrie près), de même que pour le cas du carré 5×5 : pour contrôler les 4 coins, il faut 4 surveillants sur le bord (« zone grise »), donc que tous les surveillants soient sur le bord ; un coin du carré 2×2 central (« zone blanche ») doit être contrôlé par un surveillant sur une case du bord voisine, ce qui nécessite encore les 4 surveillants ; ceux-ci ne peuvent donc être placés sur les coins de la zone grise...

(2) Plus précisément, si on place un surveillant dans un coin de la zone blanche, soit il y a un surveillant au coin de la zone grise le plus proche et alors on n'ajoute aucune case grise contrôlée, soit ce coin gris est contrôlé par un surveillant placé sur l'une des cases grises voisines et le surveillant placé sur le coin blanc ne contrôle qu'une case grise supplémentaire. Cela justifie le calcul qui suit.

(3) Le choix de la portion de pavage retenue n'est pas tout à fait précisé ; d'après le raisonnement ainsi que les dessins pour les exemples précédents, elle couvre au moins toutes les cases qui ne sont pas sur le bord du rectangle ; alors certaines pièces (les « figures de base ») sont coupées pour ne pas en déborder et couvrent moins de 5 cases. On ne peut donc pas affirmer directement que le nombre de surveillants placés par le pavage est inférieur ou égal à $(n \times m)/5$.
Dans les exemples donnés, c'est bien le cas mais cela ne l'est pas toujours. Par exemple, dans le rectangle 6×8 (6 en colonne, 8 en ligne), en commençant le pavage avec un surveillant sur la 2^e^ case de la première ligne (puis un sur la 4^e^ case de la 2^e^ ligne,...), la portion de pavage contient 10 > $(6 \times 8)/5$ pièces et de plus on ne peut pas enlever une pièce en gardant le contrôle de toutes les cases qui ne sont pas sur le bord.
Mais il y a toujours une façon de disposer le pavage par rapport au rectangle de manière que la portion de pavage couvre toutes les cases qui ne sont pas sur le bord et que le nombre de pièces ne dépasse pas $(n \times m)/5$. Moyennant la preuve de ceci (laissée au lecteur), la démonstration et le résultat donnés ici sont donc corrects.