Exercices supplémentaires du 25/09/2018
Composition de fonctions
L2 Biologie-Chimie - UE M257 - Groupe BC1

Raphaël Tinarrage - Benjamin Tron - Frédéric Menous
raphael.tinarrage@u-psud.com
http://pages.saclay.inria.fr/raphael.tinarrage/

Exercice 1

Définition : Composition de fonctions
Soient u et v deux fonctions. On peut aussi les noter $u(t)$ et $v(t)$.
La fonction composée $v \circ u(t)$, que l'on note aussi $v(u(t))$, est la fonction obtenue en remplaçant t par $u(t)$ dans $v(t)$.

Exemple - Composition de fonctions
Soit les fonctions $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t^2$. La composition $v \circ u$ est la fonction suivante :

$$v \circ u(t) = v(u(t)) = (u(t))^2 = \sin(t)^2$$

Choisis une fonction u dans la première liste, une fonction v dans la deuxième liste, calcule la composée $v \circ u$, et dis à quelle fonction elle correspond dans la troisième liste. (Il faut le faire pour tous les couples de fonctions u et v possibles.)

Première liste :

- $u(t) = \sin(t)$
- $u(t) = t^3$
- $u(t) = \cos(t) + 1$
- $u(t) = \frac{1}{t}$

Deuxième liste :

- $v(t) = t^2$
- $v(t) = \frac{1}{t}$
- $v(t) = \exp(t)$
- $v(t) = \sin(t)$

Troisième liste :

- $v \circ u(t) = \sin(t)^2$
- $v \circ u(t) = \sin(\sin(t))$
- $v \circ u(t) = \frac{1}{t^3}$
- $v \circ u(t) = \cos(\exp(t)) + \exp(t)$
- $v \circ u(t) = \frac{1}{\sin(t)}$
- $v \circ u(t) = \exp(-t)$
- $v \circ u(t) = \exp(\cos(t)) + 1$
- $v \circ u(t) = \exp(\cos(t) + 1)$
- $v \circ u(t) = 2\sin(t)$
- $v \circ u(t) = \sin(\exp(t))$
- $v \circ u(t) = \sin(\frac{1}{t})$
- $v \circ u(t) = (\cos(t) + 1)^2$
- $v \circ u(t) = \cos(t^2) + 1$
- $v \circ u(t) = \frac{1}{t^2}$
- $v \circ u(t) = \sin(t^2)$
- $v \circ u(t) = t^5$
- $v \circ u(t) = t^6$
- $v \circ u(t) = \cos(\exp(t)) + 1$
- $v \circ u(t) = \sin(\cos(t) + 1)$
- $v \circ u(t) = \frac{1}{\cos(t)+1}$
- $v \circ u(t) = t$

Exercice 2

Méthode - Dérivation d'une fonction composée Soient u et v deux fonctions, et $v \circ u$ leur composée. Alors la dérivée de la fonction $v \circ u$ se calcule grâce à la formule suivante :

$$(v \circ u(t))' = u'(t) \times v'(u(t)).$$

Il faut donc calculer trois choses : la dérivée u' de u, la dérivée v' de v, et la composée $v'(u)$.

Exemple 1 - Dérivation d'une fonction composée
Soient $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t^2$. On a $v \circ u(t) = \sin(t)^2$. On veut calculer la dérivée $(v \circ u)'$ de $v \circ u$.
On calcule : $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = 2t$.
On a alors $v' \circ u(t) = v'(u(t)) = v'(\sin(t)) = 2\sin(t)$.
Conclusion : on a

$$(v \circ u(t))' = u'(t) \times v'(u(t)) = \cos(t) \times 2\sin(t) = 2\cos(t)\sin(t)$$

Exemple 2 - Dérivation d'une fonction composée
Soient $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. On a $v \circ u(t) = \frac{1}{\sin(t)}$. On veut calculer la dérivée $(v \circ u)'$ de $v \circ u$.
On calcule : $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$.
On a alors $v' \circ u(t) = v'(u(t)) = v'(\sin(t)) = -\frac{1}{\sin(t)^2}$.
Conclusion : on a

$$(v \circ u(t))' = u'(t) \times v'(u(t)) = \cos(t) \times -\frac{1}{\sin(t)^2} = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)^2}$$

Choisis une fonction u dans la première liste, une fonction v dans la deuxième liste, calcule la composée $v \circ u$, et calcule sa dérivée. (Il faut le faire pour tous les couples possibles.)

Première liste :

- $u(t) = \sin(t)$
- $u(t) = t^3$
- $u(t) = \frac{1}{t}$

Deuxième liste :

- $v(t) = t^2$
- $v(t) = \frac{1}{t}$
- $v(t) = \ln(t)$

Exercice 3

Pour toutes les fonctions f de la troisième liste, trouver une fonction u de la première liste et une fonction v de la deuxième liste telles que $f = v \circ u$

Première liste :

- $u(t) = \sin(t)$
- $u(t) = \ln(t)$
- $u(t) = t^3$
- $u(t) = \frac{1}{t}$

Deuxième liste :

- $v(t) = t^3$
- $v(t) = \frac{1}{\cos(t)}$
- $v(t) = \exp(t)$
- $v(t) = \ln(t)$

Troisième liste :

- $f(t) = \frac{1}{t^3}$
- $f(t) = \frac{1}{\cos(\frac{1}{t})}$
- $f(t) = \ln(\ln(t))$
- $f(t) = t$
- $f(t) = \exp(\sin(t))$
- $f(t) = t^9$

Exercice 4

Pour toutes les fonctions f de la troisième liste, trouver une fonction u de la première liste et une fonction v de la deuxième liste telles que $f = v \circ u$. Calculer ensuite la dérivée de f grâce à la formule de dérivation d'une fonction composée.

Première liste :

- $u(t) = \cos(t)$
- $u(t) = \cos(t) + 1$
- $u(t) = \ln(t)$
- $u(t) = t^3$

Deuxième liste :

- $v(t) = \frac{1}{t}$
- $v(t) = \exp(t)$
- $v(t) = \ln(t)$

Troisième liste :

- $f(t) = \frac{1}{\cos(t)}$
- $f(t) = \frac{1}{1+\cos(t)}$
- $f(t) = \exp(\cos(t))$
- $f(t) = \ln(\ln(t))$
- $f(t) = \exp(t^3)$
- $f(t) = \exp(1 + \cos(t))$

Exercice 5

Pour toutes les fonctions f suivantes, trouver deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$. Calculer ensuite la dérivée de f grâce à la formule de dérivation d'une fonction composée.

- $f(t) = \cos(\frac{1}{t})$
- $f(t) = \cos(\sin(t))$
- $f(t) = \frac{1}{\cos(t)+\sin(t)}$
- $f(t) = \frac{1}{\ln(t)}$
- $f(t) = \ln(\frac{1}{t})$
- $f(t) = \ln(t)^3$

Exercice 6

Méthode - Recherche de primitive par reconnaissance de la forme $u' \times v' \circ u$
Objectif : trouver une primitive d'une fonction f

1. On cherche deux fonctions u et v' telles que la fonction f s'écrive $f = u' \times v' \circ u$
2. On calcule une primitive v de v'.

Conclusion : une primitive de f est $F = v \circ u$.

Exemple - Recherche de primitive par reconnaissance de la forme $u' \times v' \circ u$
On cherche une primitive de $f(t) = \cos(t)(\sin(t))^2$

1. Soit $u(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = t^2$. On a $u'(t) = \cos(t)$. On remarque que $u'(t) \times v'(u(t)) = \cos(t)(\sin(t))^2$, ce qui vaut bien $f(t)$.
2. On calcule : une primitive de v' est $v(t) = \frac{t^3}{3}$.

Conclusion : une primitive de f est $F(t) = v(u(t)) = \frac{1}{3}(\sin(t))^3$.

Pour toutes les fonctions f de la troisième liste, trouver une fonction u de la première liste et une fonction v de la deuxième liste telles que $f = u' \times v' \circ u$. Calculer ensuite une primitive de f par la méthode de reconnaissance de la forme $u' \times v' \circ u$.

Première liste :

- $u(t) = \sin(t)$
- $u(t) = t^2$
- $u(t) = 1 + t$

Deuxième liste :

- $v(t) = \exp(t)$
- $v(t) = \ln(t)$
- $v(t) = t^4$

Troisième liste :

- $f(t) = \cos(t) \times 4\sin(t)^3$
- $f(t) = 2t \times \exp(t^2)$
- $f(t) = \cos(t) \times \exp(\sin(t))$
- $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$
- $f(t) = \frac{1}{1+t}$
- $f(t) = \exp(1 + t)$

Exercice 7

Pour toutes les fonctions f suivantes, trouver une fonction u de la première liste et une fonction v de la deuxième liste telles que $f = u' \times v' \circ u$. Calculer ensuite une primitive de f par la méthode de reconnaissance de la forme $u' \times v' \circ u$.

- $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)+10}$
- $f(t) = \cos(t) \times 5\sin(t)^4$
- $f(t) = \frac{2t}{t^2+1}$
- $f(t) = \sin(t)\exp(\cos(t))$
- $f(t) = \frac{1}{t\ln(t)}$
- $f(t) = 2\cos(t)\sin(t)\exp(\sin(t)^2)$